因为 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\theta d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\theta d\theta=\pi$ 以及 $\int_{-\pi}^{\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta=0$(即, $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上是正交的并具平方模 π). 如果所有直线在 p 处旋转相同的量, 由于这些二阶导数的平均 (参看 (9)) 是相同的, 所以, 如在坐标旋转下 (x,y) 变成 $(\bar{x},\bar{y})$, 我们推得 $u_{xx}+u_{yy}=u_{\bar{x}\bar{x}}+u_{\bar{y}\bar{y}}$. 类似的论证可用来证明 $u_{xx}+u_{yy}$ 在关于平面上某点旋转变换下是不变的. 在这种情形, 二阶方向导数的平均取在一个圆周上, 圆周上方向代表单位方向.

Laplace 方程的边值问题

我们在这里要叙述 Laplace 方程两个标准边值问题. 它们称为 Dirichlet 问题和 Neumann 问题. 令 D 是 xy–平面中的一个区域并假设 D 由有限多条 "好的" 封闭曲线 (不属于 D 的部分) 所界定, 所有这些点组成的集合记为 C(参看图 1).

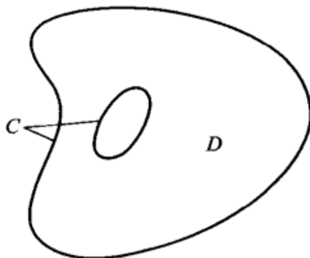


图 1

如果把开集 D 与 C 中所有的边界点合并起来, 则得到一个闭集, 记为 $D\cup C$, 是 D 与 C 的并. 设 f 是给定的定义在边界 C 上的连续函数. 从物理学的观点, 把 D 看作导热板, f 看作在该板的边界 C 上指定的温度分布. 因此, Dirichlet 问题寻求由在边界 C 上这个指定的温度 f 所产生的 (在板的内部) 稳态温度. 由数学的观点, Dirichlet 问题寻求 D 上 Laplace 方程的解 (即, D 上的调和函数), 使得在 C 上任意点 p, 通过要求 (x,y)(在 D 内) 是充分靠近 p, 则 $u(x,y)$ 可任意接近 $f(p)$. 换句话说, 如果在 C 上的每点 p, 定义 $u(p)=f(p)$, 从而把 u 的定义域从 D 延拓到 $D\cup C$, 且要求经延拓后的函数 u 在 $D\cup C$ 上是连续的并在 D

上满足 Laplace 方程. Dirichlet 问题简单地写成

Dirichlet 问题:

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_{xx}+u_{yy}=0, \quad \text{于 } D\text{中};\\ &\text{B.E.} \quad u(p)=f(p), \quad \text{对 } C \text{ 上所有的 } p, \end{aligned} \tag{10}$$

其中隐含要求函数 u 连续地延拓 (根据 f 在 C 上的值) 到 $D\cup C$. 不然的话, 任何人可通过取 u 在整个 D 为 0 在 C 上等于 f 来断言该问题获解.

注记 注意到 D.E. 只要求在 D 内成立, 而不是在 $D\cup C$ 上成立. 因此, 这里不必要求 u 具有越过边界的 C^2 延拓, 不同于前面的章节, 那里 D.E. 要求在包括边界的一个带形内成立. 换言之, 就 Dirichlet 问题而言, 只要求函数 u 本身 (不是它的二阶偏导数) 连续地延拓到边界. 这样, 为了求解 Dirichlet 问题, 不必假设 f 在 C 上是 C^2 的 (即, 只需假设 f 在 C 上是 C^0 的). 当然, 没有办法用实验方法来确定一个温度分布的可微性的程度. 的确, 这个问题是无意义的. 我们总能在实验误差之内用一个 C^∞ 函数来逼近一个物理温度分布 (即, 由任一数据点的有限集合, 可画出一条光滑的曲线). 然而, 数学考虑超过了具体的工程问题所相关的范围, 我们也将在较小的程度上超过具体问题所关心的范围. □

利用上面相同的记号, Neumann 问题寻求 D 上调和函数 u, 使得在 C 上每点 p, u 沿着外法向 $\mathbf{n}(p)$(与 C 垂直) 的方向导数等于值 $g(p)$, 其中 g 是某个给定的定义在 C 上的连续函数 (参看图 2).(有关在 C 的角点处的外法向的含义, 如果有的话, 存在技术上的困难, 在此不表.)

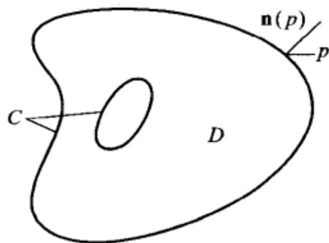


图 2

简明地写成

Neumann 问题:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad \text{于}D\text{中};\\&\text{B.E.}\quad \nabla u(p)\cdot\mathbf{n}(p)=g(p),\quad \text{对 }C\text{ 上所有的 }p,\end{aligned}\tag{11}$$

其中默许假设 ∇u 连续地从 D 延拓到 $D\cup C$. 用物理学术语, 温度梯度的法向分量在一块导热板的边界上给定 (即, 热经由边界损失或获取的比率是指定的), 我们要求确定在板内产生的稳态温度 (如果这样的温度存在). 由物理学基础, 为使这样的稳态温度分布存在, 通过 C 的净热流量必须是零. 因此, 我们猜想 (恰当地)Neumann 问题将无解, 除非假设函数 g 在 C 上值的平均为零. 这个假设称为**相容性条件**. 在一杆 ($0\leqslant x\leqslant L$) 中一维热流的这种相容性条件的类似条件是 $-u_x(0,t)+u_x(L,t)=0$ (参看第 3.3 节的例 6, 那里, 除非 $a=b$, 没有稳态特解).

Laplace 方程还有其他重要的边值问题. 例如, 组合 Dirichlet 边界条件和 Neumann 边界条件得到**第三类 B.C.**, 即, 对给定的定义在 C 上的连续函数 h 和常数 k(在应用中它通常是正的),$\nabla u(p)\cdot\mathbf{n}(p)+ku(p)=h(p)$. 再者, 在上述问题中, Laplace 方程可用它的非齐次形式来代替, 即 **Poisson方程**

$$u_{xx}+u_{yy}=q(x,y).\tag{12}$$

就稳态温度而言, 也许由于放射性或微波, 函数 $q(x,y)$ 跟与时间无关的内部热源密度成比例. Poisson 方程 (12) 的特解常能由以下积分公式获得

$$u_p(x,y)=\frac{1}{4\pi}\int\int_D \ln[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2]q(\bar{x},\bar{y})d\bar{x}d\bar{y},\tag{13}$$

当 q 是 D 上 "适当好的" 的函数时, 上式是 (12) 的解(参看第 6.4 节的习题 9). 利用特解 (13), 可以把 Poisson 方程的边值问题化为 Laplace 方程相应的问题, 就如以下举例说明的.

例 3 把 Poisson 方程的 Dirichlet 问题化为 Laplace 方程相关的 Dirichlet 问题.

$$\begin{aligned}&\text{D.E.} \quad u_{xx}+u_{yy}=q(x,y), \quad \text{于 } D\text{中};\\&\text{B.C.} \quad u(x,y)=g(x,y), \quad \text{对 } C \text{ 上所有的 } (x,y).\end{aligned} \tag{14}$$

解 设 $u_p(x,y)$ 是 D.E. 的一个特解 (例如, (13)), 令 v 是以下相关的 Dirichlet 问题的解:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.} \quad v_{xx}+v_{yy}=0, \quad \text{于 } D\text{中};\\&\text{B.C.} \quad v(x,y)=g(x,y)-u_p(x,y), \quad \text{对 } C \text{ 上所有的 } (x,y).\end{aligned} \tag{15}$$

则 (14) 的解是 $u(x,y)=u_p(x,y)+v(x,y)$. 于是, 通过求解 (15) 我们得到 (14) 的一个解. □

Laplace 方程的通解

回忆一下波方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ 的通解是通过以下方式得到 (在第 5.2 节): 把波算子分解成两个一阶算子

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

然后对 $u_t-au_x=0$ 和 $u_t+au_x=0$ 的通解相加, 得到波方程的通解 $u(x,t)=f(x+at)+g(x-at)$. 如果以 y 替换 t 并令 $a=i=\sqrt{-1}$, 则波方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ 变成 Laplace 方程. 因此, 波方程通解暗示 Laplace 方程的通解是 (在某种意义下)

$$u(x,y)=f(x+iy)+g(x-iy). \tag{16}$$

要精确定义 (16) 中允许怎样的复变量 $z=x+iy$(或 $\bar{z}=x-iy$) 函数 f(或 g) 是相当棘手的. 最简单适当的函数是幂函数 $f(z)=z^n$(或 $g(\bar{z})=\bar{z}^n$), 其中 $n\geqslant 0$ 是不同的整数. 例如, 注意到 $z^2=(x^2-y^2)+i2xy$, 它是 Laplace 方程的复解 (即, 实部和虚部都是调和的). Laplace 方程的一个复解称为**复调和函数**. 利用 z^n, $n=0,1,2,3,\cdots$, 可生成无穷多线性无关的复调和函数 (参看习题 5). 更一般地, 如果 $f(z)$ 是个幂级数 (即, 函数 z^n 的一个无穷叠加), 设为 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n(a_0,\ a_1,\ a_2,\cdots$ 是复常数), 它对 z 在围绕 $z=0$ 的某个开圆盘收敛, 则 $f(z)$ 是复调和函数. 这样的幂级数函数称为是**复解析的**(关于 $z=0$). 例如,

$$e^z=f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\exp(x+iy)=e^x\cos y+ie^x\sin y$$

是调和的和复解析的. 在围绕 $z=0$ 的某个圆盘收敛, 且具 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{z}^n$ 形式的幂级数函数称为**共轭解析的**(关于 $\bar{z}=0$), 它们也是复调和函数. 经一些努力, 诸位能证明任意定义在 $z=0$ 附近的复调和函数能写成 (16) 的形式, 其中 $f(z)$ 是解析的, $g(\bar{z})$ 是共轭解析的. 因此, 有了这些适当的解释, (16) 是 Laplace 方程的通解. 在第 6.5 节将会看到更多的调和函数与复变量函数之间的密切联系, 那里解析函数用来求围绕某种障碍的理想流体流的流线, 或在二维静电学中围绕带电导体的等势曲线.

概要 6.1

1. Laplace 方程的应用: Laplace 方程 $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$ 的解 $u=u(x,y,z)$ (或 $u_{xx}+u_{yy}=0$, $u=u(x,y)$) 可认为是稳态温度分布, 静电位势, 重力位势, 某种流体流的速度势 (参看第 6.5 节), 等等.

2. Laplace 运算的旋转不变性: 关于 u 的二维 Laplace 运算, 即 $u_{xx}+u_{yy}$, 在任一点 $p=(x,y)$, 是 u 在 p 处沿着所有过 p 的直线方向的二阶方向导数平均的两倍. 几何解释是 Laplace 运算与坐标平移和坐标旋转无关. Laplace 算子 $\triangle$ 出现在许多应用中与 $\triangle$ 的旋转不变性有关.

3. Laplace 方程的边值问题: 设 D 是 xy–平面中的区域, 它由有限多条 "好的" 曲线 (不属于 D 的部分) 所界定, 它们的并是 C, 为 D 的边界. 在 D 上的 Laplace 方程有两种标准类型的边值问题, 一是

Dirichlet 问题:

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_{xx}+u_{yy}=0, \quad \text{于 } D\text{中};\\ &\text{B.C.} \quad u(p)=f(p), \quad \text{对 } C \text{ 上所有的 } p. \end{aligned}$$

另一个是

Neumann 问题:

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_{xx}+u_{yy}=0, \quad \text{于 } D\text{中};\\ &\text{B.C.} \quad \nabla u(p)\cdot \mathbf{n}(p)=g(p), \quad \text{对 } C\text{上所有的 } p. \end{aligned}$$

这里, f 和 g 是给定的在 C 上连续的函数. 函数 $u(x,y)$ 要求是在 D 上 D.E. 的 C^2 解. 在 Dirichlet 问题中, 函数 u 在 D 上以及在 C 上指定的值 $f(p)$, 要求在

$D \cup C$ 上是连续的. 在 Neumann 问题中, u_x 和 u_y 必须以使 B.C. 成立的方式下连续地延拓到 C.

练习 6.1

1. 在 xy–平面中由

$$\bar{x} = ax + by + e \quad 和 \quad \bar{y} = cx + dy + f$$

定义新坐标, 其中 a, b, c, d, e 和 f 是常数, 且为了确保逆变换存在, $ad - bc \neq 0$. 令 $\bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) = u(x, y)$ (即, $\bar{u}$ 就是以新变量表示的 u).

(a) 证明如果 u 是 C^2 的, 则

$$u_{xx} + u_{yy} = (a^2 + b^2)\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} + 2(ac + bd)\bar{u}_{\bar{x}\bar{y}} + (c^2 + d^2)\bar{u}_{\bar{y}\bar{y}}.$$

(b) 假设 $(\bar{x}, \bar{y})$ 是由原坐标轴经以逆时针方向旋转某个角度 θ 得到的新坐标. 则验证 $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$, $c = -\sin\theta$ 和 $d = \cos\theta$. 由 (a) 推断这时 $u_{xx} + u_{yy} = \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{u}_{\bar{y}\bar{y}}$, 所以 Laplace 方程的形式在旋转下保持不变, 在坐标轴的平移下也是保持不变.

2. 设 u_1 和 u_2 是调和函数 (即 Laplace 方程的解).

(a) 证明对任意常数 c_1 和 c_2, $c_1u_1 + c_2u_2$ 是调和函数.

(b) 如果 $u(x, y)$ 是调和的, 推断只当 $u(x, y) = ay + b$ 时 $xu(x, y)$ 是调和的, 其中 a 和 b 是常数.

(c) 给出两个调和函数它们的乘积不是调和函数的例子.

3. 利用分离变量求所有具形式 $u(x, y) = X(x)Y(y)$ 的调和函数. 记住考虑分离常数是正的, 负的和零的情形.

4. 证明 $(x + iy)^2$ 的实部和虚部是调和的.(在习题 5(d) 中要求读者对 $x + iy$ 的任意非负整数幂证明这个事实.)

5. 注意到 $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$. 这两个因式引导我们考虑两个复一阶方程 $f_x + if_y = 0$ 和 $f_x - if_y = 0$.

(a) 证明复值函数 $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ 满足 $f_x + if_y = 0$ 当且仅当 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 满足一阶方程组 $u_x = v_y$ 和 $u_y = -v_x$. 这两个方程称为 **Cauchy-Riemann 方程**.

(b) 如果 u 和 v 是 C^2 函数, 且满足 Cauchy-Riemann 方程, 则证明 u 和 v 必是调和的.

(c) 假设 $U(x, y) + iV(x, y) = (x + iy)(u + iv)$, 其中 u 和 v 是满足 Cauchy-Riemann 方程的 C^2 函数. 证明 U 和 V 也满足 Cauchy-Riemann 方程.

(d) 由 (b) 和 (c) 推断, 对所有非负的整数 n, $(x + iy)^n$ 的实部和虚部是调和的.

注记 如果 $f = u + iv$, 其中 u 和 v 是满足 Cauchy-Riemann 方程 (或等价地, $f_x + if_y = 0$) 的 C^1 函数, 则 $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ 是复变量 $z = x+iy$ 的复解析函数. 函数 $\bar{f} = u - iv$ 满足 $\bar{f}_x - i\bar{f}_y = 0$, 所以 $\bar{f}$ 是 z 的共轭解析函数.

6. 用稳态温度分布来叙述 Laplace 方程的 Dirichlet 问题和 Neumann 问题之间物理意义的区别.

7. (a) 在 Poisson 方程 $u_{xx} + u_{yy} = q(x,y)$ 中, 以稳态温度情形 $q(x,y)$ 的物理意义是什么?

(b) 给出一个物理解释, 为什么 Poisson 方程的 Neumann 问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_{xx} + u_{yy} = q(x,y), \quad \text{于 } D \text{中} \\ &\text{B.C.} \quad \nabla u(p) \cdot \mathbf{n}(p) = g(p), \quad \text{对 } C \text{ 上所有的 } p \end{aligned}$$

无解, 除非假设以下的**相容性条件**满足:

$$\int\int_D q(x,y)dxdy = \int_C g(p(s))ds,$$

其中 s 表示沿着区域 D 的边界 C 的弧长参数.

§6.2 矩形上的 Dirichlet 问题

下面的唯一性定理的证明留在第 6.4 节给出 (第 6.4 节的定理 2; 对矩形情形可参看习题 10).

> **定理 1 (Dirichlet 问题的唯一性定理)** 有界开集 D 上的 Dirichlet 问题, 在 D 的边界上有连续的给定函数 F, 最多只有一个解.

因此, 由于知道求得的任一解是唯一的满足给定边值的解, 现来着手解 D 是矩形 $0 < x < L$, $0 < y < M$ 情形的 Dirichlet 问题. 假设 F 在三条边上为 0, F 在剩下的边 $y = 0$(参看图 1) 上等于一个适当的连续函数 $f(x)$.

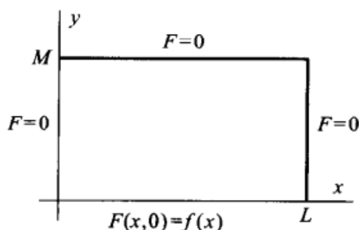


图 1

更精确地, 我们试图解以下 Dirichlet 问题:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<L,\quad 0<y<M;\\&\text{B.C.}\quad \begin{cases}u(x,0)=f(x), & u(x,M)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant L,\\ u(0,y)=0, & u(L,y)=0, \quad 0\leqslant y\leqslant M.\end{cases}\end{aligned} \tag{1}$$

为了 B.C. 相容, 我们需假设 $f(0)=f(L)=0$. D.E. 的乘积解 $u(x,y)=X(x)Y(y)$ 易由分离变量确定. 由 D.E., 得 $X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0$, 因此对某个常数 c,

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{-Y''(y)}{Y(y)}=c=\pm b^2.$$

于是得下面结果:

情形 1 $(c=-b^2<0)$:

$$u(x,y)=\big(c_1\cos(bx)+c_2\sin(bx)\big)\big(d_1e^{by}+d_2e^{-by}\big). \tag{2}$$

情形 2 $(c=b^2>0)$:

$$u(x,y)=\big(c_1e^{bx}+c_2e^{-bx}\big)\big(d_1\cos(by)+d_2\sin(by)\big). \tag{3}$$

情形 3 $(c=0)$:

$$u(x,y)=(c_1+c_2x)(d_1+d_2y). \tag{4}$$

可验证满足 (1) 的三个齐次 B.C. 的唯一乘积解是以下情形 1 的乘积解的常数

倍:

$$u_n(x,y)=\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\text{h}\frac{n\pi(M-y)}{L},\ n=1,2,\cdots. \tag{5}$$

关于情形 3 的乘积解看后面的例 1, 以及相关的例 7, 在那里情形 1 的乘积解也是用双曲函数来表示. 回忆一下双曲正弦和双曲余弦的定义为

$$\sinh z\equiv\frac{1}{2}(e^z-e^{-z})\quad 和\quad \cosh z\equiv\frac{1}{2}(e^z+e^{-z}).$$

因为 $\sinh 0=0$, 所以得知 (5) 符合 B.C. $u(x,M)=0$. 由叠加原理, (1) 的 D.E. 和齐次 B.C. 的更一般的解是

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{N}A_n\sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi(M-y)}{L}. \tag{6}$$

令 $y=0$, 得

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{N}A_n\sinh\frac{n\pi M}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{7}$$

因此, 当 (1) 中的 $f(x)$ 具有形式 (7) 时, 则问题 (1) 的唯一解是 (6). 由第 4.3 节的定理 1, 如果 $f(x)$ 是连续的和分段 C^1 的, 且 $f(0)=f(L)=0$, 则 $f(x)$ 的 Fourier 正弦级数的部分和 $S_N(x)$ 一致收敛到 $f(x)$. 因此, 在这种情形, 在实验误差之内, 可假设 $f(x)$ 具有形式 (7), 其中对 $n=1,2,\cdots,N$,

$$A_n=\frac{1}{\sinh\dfrac{n\pi M}{L}}\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx. \tag{8}$$

如果 (1) 的 B.C. 换成

$$\text{B.C.}\begin{cases}u(x,0)=0,\quad u(x,M)=g(x),\quad 0\leqslant x\leqslant L,\\ u(0,y)=0,\quad u(L,y)=0,\quad 0\leqslant y\leqslant M,\end{cases} \tag{9}$$

则代替乘积解 (5), 有

$$u_n(x,y)=\sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L}. \tag{10}$$

因此, (9) 的 D.E. 和齐次 B.C. 更一般的解是

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{N}B_n\sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L}, \tag{11}$$

且

$$u(x,M)=\sum_{n=1}^{N}B_n\sinh\frac{n\pi M}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{12}$$

假设 $g(x)$ 由它的 Fourier 正弦级数 N 项部分和表示是足够的, 则 (11) 是满足 B.C.(9) 的调和函数, 其中

$$B_n=\frac{1}{\sinh\dfrac{n\pi M}{L}}\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx. \tag{13}$$

通过对解 (6) 和 (11) 相加, 得到具以下 B.C. 的 Dirichlet 问题的解

$$\text{B.C.}\begin{cases}u(x,0)=f(x), & u(x,M)=g(x), & 0\leqslant x\leqslant L,\\ u(0,y)=0, & u(L,y)=0, & 0\leqslant y\leqslant M,\end{cases}$$

其中假设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是最多有 N 项的有限 Fourier 正弦级数. B. C. 具形式

$$\text{B.C.}\begin{cases}u(x,0)=0, & u(x,M)=0, & 0\leqslant x\leqslant L,\\ u(0,y)=h(y), & u(L,y)=k(y) & 0\leqslant y\leqslant M\end{cases}$$

的 Dirichlet 问题的解可通过简单地交换 x 和 y (以及限 L 和 M) 的角色, 在公式 (8) 和 (13) 中, 用 h 代替 f, 用 k 代替 g 得到. 由叠加原理, 得下面结果:

定理 2 假设 a_n, b_n, c_n 和 d_n 是 $f(x)$, $g(x)$, $h(y)$ 和 $k(y)$ 的 Fourier 正弦系数 (假设对 $n > N$ 它们为零), 每个是有限项 Fourier 正弦级数. 则下面 Dirichlet 问题

$$\begin{array}{ll} \text{D.E.} & u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<L, \quad 0<y<M \\ \text{B.C.} & \begin{cases} u(x,0)=f(x), \quad u(x,M)=g(x), \quad 0\leqslant x\leqslant L \\ u(0,y)=h(y), \quad u(L,y)=k(y), \quad 0\leqslant y\leqslant M \end{cases} \end{array} \tag{14}$$

的解为

$$\begin{aligned} u(x,y)=\sum_{n=1}^{N}\Big(&A_n\sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi(M-y)}{L} \\ &+B_n\sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L} \\ &+C_n\sin\frac{n\pi y}{M}\sinh\frac{n\pi(L-x)}{M} \\ &+D_n\sin\frac{n\pi y}{M}\sinh\frac{n\pi x}{M}\Big), \end{aligned} \tag{15}$$

其中

$$A_n=\frac{a_n}{\sinh\dfrac{n\pi M}{L}}, \quad B_n=\frac{b_n}{\sinh\dfrac{n\pi M}{L}}$$

$$C_n=\frac{c_n}{\sinh\dfrac{n\pi L}{M}}, \quad D_n=\frac{d_n}{\sinh\dfrac{n\pi L}{M}}.$$

注意到解 (15) 在矩形的角点处为零. 这是因为我们已隐含地假设函数 f, g, h 和 k 在它们定义区间的端点为零. 一般说来, Dirichlet 问题的连续边值在角点不为零. 然而, 通过从未知函数 u 减去一个在角点等于指定值的特解 U 我们能容易处理这种情形. 下面的例子说明如何求 U. 令 $v=u-U$, 则 (如上) 解关于 v 相应的 Dirichlet 问题, 其在角点处具零边值 (作为一个特殊例子, 参看习题 4).

例 1 求具有以下形式的唯一的调和函数

$$U(x,y)=a+bx+cy+dxy, \tag{16}$$

其中 a, b, c 和 d 是常数, 且对给定的 A, B, C 和 D, 有 $U(0,0)=A$, $U(L,0)=$

B, $U(0,M)=C$ 和 $U(L,M)=D$. 由此结果推断满足这两个 B.C. $u(0,y)=0$ 和 $u(L,y)=0$, $0\leqslant y\leqslant M$ ①的任一情形 3(参看 (4)) 的乘积解必恒等于零.

解 注意到 $U(0,0)=A$ 隐含 $a=A$. 则 $U(L,0)=B$ 隐含 $a+bL=B$ 或 $b=(B-a)/L$. 类似地, $U(0,M)=C$ 隐含 $c=(C-A)/M$, 还有 $U(L,M)=D$ 隐含$d=(D-a-bL-cM)/(LM)=(D+A-B-C)/(LM)$. 于是求得关于常数 a, b, c 和 d 用已给的常数 A, B, C 和 D 来表示的唯一的值. 注意到, 除掉乘子, 任一情形 3 的乘积解具有形式 (16). B.C. $u(0,y)=0$ 和 $u(L,y)=0$($0\leqslant y\leqslant M$) 隐含在矩形的角点处 u 为零 (即 $A=B=C=D=0$). 于是, 由刚已证明的, 得 $u(x,y)\equiv 0$. □

例 2 解下面问题

$$\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<\pi,\quad 0<y<\pi;$$

$$\text{B.C.}\begin{cases} u(x,0)=0, & u(x,\pi)=5\sin(2x)-7\sin(8x), \quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ u(0,y)=\sin y, & u(\pi,y)=0, \quad 0\leqslant y\leqslant\pi. \end{cases}$$

解 方法 1(检验法) 注意到与 B.C. 相应的 D.E. 的三种乘积解是 $\sin(2x)\sinh(2y)$, $\sin(8x)\sinh(8y)$ 和 $\sin y\sinh(\pi-x)$. 通过组成一个叠加, 得

$$u(x,y)=E\sin(2x)\sinh(2y)+F\sin(8x)\sinh(8y)+G\sin y\sinh(\pi-x).$$

由非齐次 B.C. 得出 $E=\frac{5}{\sinh(2\pi)}$, $F=\frac{-7}{\sinh(8\pi)}$ 和 $G=\frac{1}{\sinh\pi}$. 而且满足齐次 B.C.. 用这种方法, 应能仔细验证所有 B.C. 满足. □

方法 2(由分离变量获得解) 尽管分离变量对 Laplace 方程可一般性地实施这种事实, 但一些教师将强调对每个具体的问题要重复这个过程, 然后确定满足三个齐次 B.C. 的每组条件的乘积解.(共有四种可能性, 这取决于在哪个 B.C. 上取非齐次. 在上述问题中只有两个 B.C. 是非齐次的, 因而这里只需考虑两种可能性.) 通过对由此得到的乘积解叠加, 得到如用方法 1 获得的解. 这是在获得一般问题 (14) 的解 (15) 中使用的基本方法. 虽然方法 2 麻烦, 但这是确保学生理解公式 (15) 是如何获得的唯一方式.

方法 3(利用导出的公式 (15)) 注意到 $b_2=5$, $b_8=-7$, $c_1=1$ 以及边值函数 Fourier 正弦级数所有其他的系数为零. 记住用修正因子相除, 得到 B_2, B_8 和 C_1(即, 方法 1 中的 E, F 和 G).

①原文误为 $0\leqslant y\leqslant L$.——译者

矩形上调和函数最大值最小值原理.

在第 6.4 节 (参看定理 1 和定理 4), 我们证明调和函数的最大值最小值原理. 在矩形的特殊情形, 这个原理如下:

函数 u 在闭矩形 $R: 0 \leqslant x \leqslant L,\ 0 \leqslant y \leqslant M$ 上连续, 在 R 的内部调和, 则必在边界上 (即, 在四条边的一条边上) 取到它的最大值和最小值. 而且, 如果最大值或最小值还在内部一点达到, 则 u 在 R 上必是常数.

实际上, 该原理对在任一连通的, 有界的 (即, 具有有限的范围) 区域上, 能连续地延拓到该区域的边界的调和函数成立 (关于精确定义和结果参看第 6.4 节). 由最大值最小值原理立刻得到这种区域 Dirichlet 问题解的唯一性, 因为两个解的差的最大值和最小值在边界上出现, 在其上这个差为零. 下个例子说明最大值最小值原理.

例 3 求使调和函数 $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + xy - x$ 在正方形区域 $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1$ 达到最大值和最小值的点.

解 为了求 u 的最大值和最小值, 通常计算 u_x 和 u_y, 然后为了求出在正方形内部的驻点, 同时对 x 和 y 解方程 $u_x = 0$ 和 $u_y = 0$. 然后为了与极值比较还得研究边值. 然而, 由于 u 是调和的 ($u_{xx} = 6x$ 和 $u_{yy} = -6x$), 最大值最小值原理隐含只需考虑边值, 内部驻点不会是最大值点和最小值点, 除非 u 是常数. 在边界上,

$$\begin{aligned} &u(x,0) = x^3 - x, \quad &&u(x,1) = x^3 - 3x, \quad &&0 \leqslant x \leqslant 1 \\ &u(0,y) = 0, &&u(1,y) = -3y^2 + y, &&0 \leqslant y \leqslant 1. \end{aligned} \tag{17}$$

容易求出 (17) 中的每个函数的最大值和最小值. 最大的最大值出现在 $x = 1$ 和 $y = \frac{1}{6}$, 有 $u(1, \frac{1}{6}) = \frac{1}{12}$. 最小的最小值在 $(1,1)$, 有 $u(1,1) = -2$. 由最大值最小值原理, 对正方形区域内任一点 (x,y), 有 $-2 \leqslant u(x,y) \leqslant \frac{1}{12}$.

注记 (形式解) 回忆起在一个边值问题的边界数据不能用恰当形式的有限项 Fourier 级数表示的情形, 则求解过程产生一个无穷项级数表达式, 称之为原问题的一个**形式解**(关于形式解的讨论参看第 4.3 节). 形式解可能或实际上不可能收敛到问题的解. 然而, 通过在有限项截取形式解, 通常能在实验允许的误差之内得到满足 B.C. 的 D.E. 的真实解. 这正是在工程应用中所需要的. 在例 4 我们求一个 Dirichlet 问题的形式解, 在例 5 利用最大值最小值原理来分析截取误差.

□

例 4 求下面问题的形式解

$$\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<\pi,\quad 0<y<\pi;$$
$$\text{B.C.}\begin{cases}u(x,0)=x^3(x-\pi), & u(x,\pi)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ u(0,y)=0, & u(\pi,y)=0,\quad 0\leqslant y\leqslant\pi.\end{cases}\tag{18}$$

解 我们已经知道 (参看方程 (5)) 满足齐次 B.C. 的 D.E. 的乘积解是 $u_n(x,y)=\sin(nx)\sinh[n(\pi-y)]$, $n=1,2,3,\cdots$ 的倍数. 由于 $x^3(x-\pi)$ 不是有限正弦级数, 所以寻求形如 $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nx)\sinh(n(\pi-y))$ 的形式解, 其中 A_n 由非齐次 B.C. $x^3(x-\pi)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nx)\sinh(n\pi)$ 确定. 换句话说, $A_n\sinh(n\pi)$ 等于 Fourier 正弦系数 $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^3(x-\pi)\sin(nx)dx$. 运用 Green 公式两次 (如同在第 4.1 节的例 6, 除了我们这里是用区间 $[0,\pi]$), 得

$$a_n=12\pi\big((-1)^n\frac{1}{n^3}+\frac{4}{\pi^2}\big((-1)^{n+1}+1\big)\frac{1}{n^5}\big),\quad n\geqslant 1.\tag{19}$$

作为另一种方法, 涉及四次分部积分的冗长计算也能得到相同的结果. 因此, 需要的形式解是

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin(nx)\frac{\sinh(n(\pi-y))}{\sinh(n\pi)},\tag{20}$$

其中 a_n 由 (19) 给出. □

注记 应用有关逐项微分有效性的定理 (参看第 4.3 节的习题 15), 可证形式解 (20) 实际上是 (18) 的精确解. 在实用的情况中, B.C. 数据只能在某个实验误差, 比如 $\epsilon>0$ 之内指定. 因此, 在应用中, 只需确定在 ϵ 之内满足 B.C. 的解. 即使我们要证明形式解是精确的, 但为了算出解在正方形内各个点 (x,y) 的值 (在误差 ϵ 之内), 我们仍然需要计算出在哪里截取级数. 于是, 对具体应用来说, 逐项微分的有效性不仅是不必需的, 而且也是不充分的. 下面的例子说明误差分析. □

例 5 求 N 的值, 使得在形式解 $u(x,y)$ (20) 中 N 项截取的 $u_N(x,y)$ 在误差 ϵ 之内满足 (18) 的 B.C.. 利用最大值最小值原理分析在正方形区域内两个截取 $u_N(x,y)$ 和 $u_M(x,y)$ 之间的差.

解 注意到 $u_N(x,0)$ 是 $f(x)=x^3(x-\pi)$ 的 Fourier 正弦级数的 N 项部分和. 由于 $f(x)$ 是 C^1 的, 且 $f(0)=f(\pi)=0$, 所以由第 4.3 节的定理 1, 在区间 $[0,\pi]$ 上 FSS $f(x)$ 一致收敛到 $f(x)$. 更精确地, 对于 $0\leqslant x\leqslant\pi$, 有 (其中 a_n 由

(19) 给出)

$$\begin{aligned}|x^3(x-\pi)-u_N(x,0)| &= \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\sin(nx)\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n| \\ &\leqslant 12\pi\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(1+\frac{8}{\pi^2n^2}) \leqslant 24\pi\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^3},\end{aligned}$$

其中我们利用了事实: 对 $n \geqslant 1$, $1+8/(\pi^2n^2) < 2$. 因为 $\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-3} \leqslant \int_N^{\infty} x^{-3}dx = \frac{1}{2}N^{-2}$, 所以有 $|x^3(x-\pi)-u_N(x,0)| \leqslant 12\pi N^{-2}$. 因此, 为使 $u_N(x,y)$ 在误差 ϵ 之内满足 B.C., 只要选取 $N \geqslant \sqrt{12\pi/\epsilon}$. 大家还想知道如果两个解在边界上偏差最多不超过 ϵ, 则它们在正方形内部偏差最多不超过 ϵ. 因为两个调和函数的差是调和的, 所以这是最大值最小值原理的一个直接结论. 对形式解 (20) 的两个截取函数 $u_N(x,y)$ 和 $u_M(x,y)$, 有 (对于 $M>N$) 以下在边界 $y=0$ 和 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 上它们的差的估计:

$$\begin{aligned}|u_M(x,0)-u_N(x,0)| &= \left|\sum_{n=N+1}^{M} a_n\sin(nx)\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{M}|a_n| \\ &\leqslant 24\pi\sum_{n=N+1}^{M}\frac{1}{n^3} \leqslant 24\pi\int_N^M\frac{1}{x^3}dx = 12\pi(\frac{1}{N^2}-\frac{1}{M^2}).\end{aligned}$$

在边界的其他三条边上, $u_M(x,y)$ 和 $u_N(x,y)$ 都为零. 因此, 由最大值最小值原理, 有

$$|u_M(x,y)-u_N(x,y)| \leqslant 12\pi(\frac{1}{N^2}-\frac{1}{M^2}),\ 0 \leqslant x,\ y \leqslant \pi. \tag{21}$$

不用最大值最小值原理, 不等式 (21) 可通过直接估计得到改进. 的确, 当 $y>0$, 有

$$\begin{aligned}2\sinh(n(\pi-y)) &= e^{n(\pi-y)}-e^{n(y-\pi)} \\ &= e^{-ny}(e^{n\pi}-e^{2ny}e^{-n\pi}) \leqslant e^{-ny}(e^{n\pi}-e^{-n\pi}) \\ &= 2e^{-ny}\sinh(n\pi),\end{aligned}$$

由此, 得 $\frac{\sinh(n(\pi-y))}{\sinh(n\pi)} \leqslant e^{-ny}$. 利用这个事实, 得

$$\begin{aligned}|u_M(x,y)-u_N(x,y)| &\leqslant \sum_{n=N+1}^{M}|a_n|\frac{\sinh(n(\pi-y))}{\sinh(n\pi)}\\&\leqslant \sum_{n=N+1}^{M}|a_n|e^{-ny}\leqslant e^{-(N+1)y}\sum_{n=N+1}^{M}|a_n|\\&\leqslant 12\pi(\frac{1}{N^2}-\frac{1}{M^2})e^{-(N+1)y}.\end{aligned} \tag{22}$$

因此, 对 $y>0$, 估计式 (22) 显著地改进了 (21), 因为 $e^{-(N+1)y}$ 随着 N 的增加迅速减少. 例如, 在中心 $p=(\pi/2,\pi/2)$, 取 $N=5$ 和 $M=10$, 由 (21), 有 $|u_{10}(p)-u_5(p)|\leqslant 12\pi(1/25-1/100)\approx 1.13$. 然而, (22) 以因子 $e^{-3\pi}\approx 8\times10^{-5}$ 改进这个界. 利用计算器直接计算, 得 $u_5(p)=-1.411748\cdots$ 和 $u_{10}(p)=-1.411747\cdots$(即, 差不超过 10^{-5}). □

例 6 (Neumann 问题的相容性条件) 矩形上 Neumann 问题是

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<L,\quad 0<y<M;\\&\text{B.C.}\begin{cases}u_y(x,0)=f(x), & u_y(x,M)=g(x),\quad 0\leqslant x\leqslant L,\\ u_x(0,y)=h(y), & u_x(L,y)=k(y),\quad 0\leqslant y\leqslant M.\end{cases}\end{aligned} \tag{23}$$

证明问题 (23) 无解, 除非以下的**相容性条件**成立

$$\int_0^L g(x)dx-\int_0^L f(x)dx+\int_0^M k(y)dy-\int_0^M h(y)dy=0, \tag{24}$$

即, ∇u 的法向分量围绕边界的积分等于 0.

解 如果 u 是 (23) 的解, 则

$$\begin{aligned}0&=\int_0^M\int_0^L(u_{xx}+u_{yy})dxdy=\int_0^M\int_0^L u_{xx}dxdy+\int_0^L\int_0^M u_{yy}dydx\\&=\int_0^M(u_x(L,y)-u_x(0,y))dy+\int_0^L(u_y(x,M)-u_y(x,0))dx\\&=\int_0^M k(y)dy-\int_0^M h(y)dy+\int_0^L g(x)dx-\int_0^L f(x)dx,\end{aligned}$$

其中我们已用了微积分的基本定理以及可交换积分次序的事实 (参看附录 2). □

注记 (1) 作为另一种方法, 有些读者也许看出相容性条件是下面 Green 定理的特殊情形的一个直接推论

$$\int_C \nabla u \cdot \mathbf{n} ds = \int_C u_x dy - u_y dx = \int\int_R (u_{xx} + u_{yy}) dxdy,$$

即, 经由边界的梯度流等于 $\triangle u$ 在内部的积分. 这个结论对由有限条正则、简单封闭曲线 C 所界定的有限范围的区域 R 成立. 因此, 为了对这样区域的 Neumann 问题求解, 相容性条件是必要的.

(2) 如果 (23) 的解存在, 它不是唯一的, 因为总可对一个解加上一个常数得到另一个解. 然而, 在习题 9 中我们引导读者完成证明:(23) 的任意两个解必相差一个常数. 另外, 虽然隐含地要求 u_x 和 u_y 在闭矩形上是连续的, 但没要求 u 的二阶偏导数连续地延拓到闭矩形. □

例 7 求下面问题的齐次 B.C. 和 D.E. 的乘积解 $X(x)Y(y)$

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad 0 < x < L, \qquad 0 < y < M; \\ &\text{B.C.} \begin{cases} u_y(x,0) = f(x), & u_y(x,M) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \\ u_x(0,y) = 0, & u_x(L,y) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant M. \end{cases} \end{aligned} \tag{25}$$

解 回忆起 D.E. 的任一乘积解必是形式 (2), (3) 或 (4) 之一. 先证明没有满足后两个 B.C. 的非零的情形 2 乘积解. 在情形 2, 有

$$u_x(0,y) = b(c_1 - c_2)(d_1 \cos(by) + d_2 \sin(by)),$$

因此, 由 B.C. $u_x(0,y) = 0$ 得 $c_1 = c_2$ 或 $d_1 = d_2 = 0$. 则

$$0 = u_x(L,y) = bc_1(e^{bL} - e^{-bL})(d_1 \cos(by) + d_2 \sin(by))$$

隐含 $c_1 = 0$ 或 $d_1 = d_2 = 0$. 于是, 在情形 2 最后两个 B.C. 要求该乘积解为零. 在情形 1, 由 $0 = u_x(0,y)$, 得

$$0 = bc_2(d_1 e^{by} + d_2 e^{-by}),$$

因此 $c_2 = 0$ 或 $d_1 = d_2 = 0$. 此外, 为了避免平凡解,

$$0 = u_x(L,y) = -bc_1 \sin(bL)(d_1 e^{by} + e^{-by})$$

隐含必须有 $\sin(bL) = 0$ 或对 $n \geqslant 1$ 的整数, $b = \frac{n\pi}{L}$. 还有, $u_y(x,M) = 0$ 隐含 $d_1 e^{bM} - d_2 e^{-bM} = 0$. 因此,

$$\begin{aligned} d_1 e^{by} + d_2 e^{-by} &= e^{-bM}(d_1 e^{bM} e^{by} + d_2 e^{b(M-y)}) \\ &= e^{-bM}(d_2 e^{-bM} e^{by} + d_2 e^{b(M-y)}) = 2e^{-bM} d_2 \cosh(b(M-y)). \end{aligned}$$

因此满足三个齐次 B.C. 的情形 1 的乘积解是以下的常数倍:

$$u_n(x,y)=\cos\frac{n\pi x}{L}\cosh\frac{n\pi(M-y)}{L},\quad n=1,2,\cdots. \tag{26}$$

满足 (25) 的齐次 B.C. 唯一的情形 3 的乘积解 $(c_1+c_2x)(d_1+d_2y)$ 是常数 (参看习题 6), 通过允许 $n=0$, 我们把这些常值解包括在 (26) 内. □

例 8 当 $f(x)=\sum_{n=1}^{N}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}$ 是没有常数项 $\frac{1}{2}a_0$ 的有限余弦级数时求解问题 (25). 为什么要使解存在该常数项必须为零?

解 令 $u(x,y)=A_0+\sum_{n=1}^{N}A_nu_n(x,y)$, 其中 u_n 由 (26) 给出. 则由叠加原理, u 满足 (25) 中的 D.E. 和齐次 B.C.. 注意到

$$u_y(x,0)=\sum_{n=1}^{N}-A_n\frac{n\pi}{L}\sinh\frac{n\pi M}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}. \tag{27}$$

这等于 $f(x)$, 如果

$$A_n=\frac{-a_nL}{n\pi\sinh\frac{n\pi M}{L}},\quad n=1,2,\cdots. \tag{28}$$

注意到由于 (27) 没有常数项, 所以只有当 $f(x)$ 没有常数项时 (27) 才能与 $f(x)$ 相等. 再者, 为了解存在, 由 Neumann 问题的相容性条件 (参看例 6), 必有

$$\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx=0.$$

对每个常数 A_0, 得到解

$$u(x,y)=A_0+\sum_{n=1}^{N}A_n\cos\frac{n\pi x}{L}\cosh\frac{n\pi(M-y)}{L}, \tag{29}$$

其中 A_n 通过 (28) 由给定的 a_n 表示. 由习题 9, 当 $f(x)=\sum_{n=1}^{N}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}$ 时, (25) 的所有解具有形式 (29). □

概要 6.2

1. 矩形上 Dirichlet 问题: 设 a_n, b_n, c_n 和 d_n 是 $f(x)$, $g(x)$, $h(y)$ 和 $k(y)$ 的 Fourier 正弦系数 (假设对 $n>N$ 它们为零), 每个是有限 Fourier 正弦级数.

则 Dirichelet 问题

$$\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<L,\quad 0<y<M;$$
$$\text{B.C.}\begin{cases}u(x,0)=f(x) & u(x,M)=g(x),\quad 0\leqslant x\leqslant L,\\ u(0,y)=h(y) & u(L,y)=k(y),\quad 0\leqslant y\leqslant M\end{cases}\tag{S1}$$

的解是

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{N}\Big(A_n\sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi(M-y)}{L}+B_n\sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L}$$
$$+C_n\sin\frac{n\pi y}{M}\sinh\frac{n\pi(L-x)}{M}+D_n\sin\frac{n\pi y}{M}\sinh\frac{n\pi x}{M}\Big),\tag{S2}$$

其中

$$A_n=\frac{a_n}{\sinh\frac{n\pi M}{L}},\qquad B_n=\frac{b_n}{\sinh\frac{n\pi M}{L}},$$
$$C_n=\frac{c_n}{\sinh\frac{n\pi L}{M}},\qquad D_n=\frac{d_n}{\sinh\frac{n\pi L}{M}}.$$

注意到上述函数 $f(x)$, $g(x)$, $h(y)$ 和 $k(y)$ 都在它们定义的区间的端点上为零(即, 定义在矩形边界上的函数在角点为零). 如果在边界上给定的函数在角点不为零, 我们可从 $u(x,y)$ 减去一个在角点等于给定值的调和函数 (参看例 1), 得到一个相应问题, 它的边界函数在角点等于零.

2. 最大值最小值原理和边界函数的逼近: 对矩形而言, 最大值最小值原理表明: 在闭矩形 R 上连续且在 R 内部是调和的函数 $u(x,y)$, 它的最大值 (和最小值) 必在边界 (在四条边的一条边) 上达到. 作为推论, 如果能用有限 Fourier 正弦级数一致逼近 (比方在误差 ϵ 之内) 给定的边界函数, 则关于该逼近边界函数的 Dirichlet 问题的解在整个矩形内部与精确解 (如果存在) 相差将不超过 ϵ(参看例 5). 换言之, 在边界函数上的小的变化导致解 (如果存在) 方面小的变化.

3. Neumann 问题: 矩形上的 Neumann 问题是

$$\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<L,\quad 0<y<M;$$
$$\text{B.C.}\begin{cases}u_y(x,0)=f(x), & u_y(x,M)=g(x),\quad 0\leqslant x\leqslant L,\\ u_x(0,y)=h(y), & u_x(L,y)=k(y),\quad 0\leqslant y\leqslant M.\end{cases}\tag{S3}$$

问题 (S3) 无解, 除非下面的相容性条件成立

$$\int_0^L g(x)dx - \int_0^L f(x)dx + \int_0^M k(y)dy - \int_0^M h(y)dy = 0. \tag{S4}$$

即, ∇u 的外单位法向分量 (围绕边界) 的积分等于 0. 例 7 和例 8 考虑了 Neumann 问题.

练习 6.2

1. 验证, 如果 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 的情形 2 的乘积解 (参看 (3)), 即,

$$u(x,y) = (c_1 e^{bx} + c_2 e^{-bx})(d_1 \cos(by) + d_2 \sin(by)) \ (b > 0),$$

满足 B.C. $u(0,y) = 0$ 和 $u(L,y) = 0$, 则 $u(x,y) \equiv 0$.

2. 求解以下问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < M; \\ &\text{B.C.} \begin{cases} u(x,0) = f(x), & u(x,M) = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \\ u(0,y) = h(y), & u(L,y) = k(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant M, \end{cases} \end{aligned}$$

(a) 当 $f(x) = 9\sin\frac{8\pi x}{L}$, $g(x) = 0$ 和 $h(y) = k(y) = 0$ 时;

(b) 当 $f(x) = 0$, $g(x) = \sin\frac{\pi x}{L}$ 和 $h(y) = k(y) = 0$ 时;

(c) 当 $f(x) = 9\sin\frac{8\pi x}{L}$, $g(x) = \sin\frac{\pi x}{L}$ 和 $h(y) = k(y) = 0$ 时;

(d) 当 $f(x) = g(x) = 0$ 和 $h(y) = 9\sin\frac{8\pi y}{M}$ 和 $k(y) = \sin\frac{\pi y}{M}$ 时.

3. 求解问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi; \\ &\text{B.C.} \begin{cases} u(x,0) = \sin x, & u(x,\pi) = \sin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ u(0,y) = \sin y, & u(\pi,y) = \sin y, \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

4. (a) 求一个形如 $U(x,y) = a + bx + cy + dxy$ 的函数, 使得 $U(0,0) = 0$, $U(1,0) = 1$, $U(0,1) = -1$ 和 $U(1,1) = 2$.

(b) 利用 (a) 中的答案解问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1; \\ &\text{B.C.} \begin{cases} u(x,0) = 3\sin(\pi x) + x, & u(x,1) = 3x - 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ u(0,y) = \sin(2\pi y) - y, & u(1,y) = y + 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases} \end{aligned}$$

提示 解关于 $v(x,y) = u(x,y) - U(x,y)$ 的相应问题.

5. (a) 证明问题[①]

$$\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<\pi,\quad 0<y<\pi;$$
$$\text{B.C.}\begin{cases} u(x,0)=0, & u(x,\pi)=x(\pi-x), \quad 0\leqslant x\leqslant \pi\\ u(0,y)=0, & u(\pi,y)=0, \quad 0\leqslant y\leqslant \pi.\end{cases}$$

的形式解是

$$u(x,y)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin((2k+1)x)\frac{\sinh((2k+1)y)}{\sinh((2k+1)\pi)}.$$

(b) 估计形式解在误差 0.01 之内逼近 B.C. 所需的项数.

(c) 证明 (a) 部分的形式解其实就是 Dirichlet 问题的精确解. (b) 部分形式解的截取会在整个正方形内部与精确解相差不超过 0.01 吗? 解释为什么.

6. (a) 验证如果情形 3(参看 (4)) 的乘积解 $u(x,y)=(c_1+c_2x)(d_1+d_2y)$ 满足 B.C. $u_x(0,y)=0$ 和 $u_y(x,M)=0$, 则 $u(x,y)=c_1d_1$.

(b) 证明形如 $U(x,y)=a+bx+cy+dxy$ 的 (调和) 函数是情形 3 的乘积解当且仅当 $ad-bc=0$.

7. (a) 求以下 Neumann 问题的一个解

$$\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<\pi,\quad 0<y<\pi;$$
$$\text{B.C.}\begin{cases} u_y(x,0)=\cos x-2\cos^2 x+1, & u_y(x,\pi)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant \pi,\\ u_x(0,y)=0, & u_x(\pi,y)=0, \quad 0\leqslant y\leqslant \pi.\end{cases}$$

(b) 通过加一个常数求满足 $u(0,0)=0$ 的解.

8. (a) 任给 $g(x)$ 是连续的且 $\int_0^L g(x)dx=0$, 求以下 Neumann 问题的一个形式解

$$\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<L,\quad 0<y<M;$$
$$\text{B.C.}\begin{cases} u_y(x,0)=0, & u_y(x,M)=g(x), \quad 0\leqslant x\leqslant L,\\ u_x(0,y)=0, & u_x(L,y)=0, \quad 0\leqslant y\leqslant M.\end{cases}$$

(b) 为什么在 (a) 中假设 $\int_0^L g(x)dx=0$ 是必须的?

9. 在这个问题中我们证明: 任给 Neumann 问题 (23) 的两个解 $u_1(x,y)$ 和 $u_2(x,y)$, 差 $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ 是常数.

(a) 解释为什么差 $u(x,y)$ 满足具齐次 B.C.$(f=g=h=k=0)$ 的 (23).

[①]在第一个 B.C. 中 x 的取值范围原文误为 $0\leqslant x\leqslant 1$, 在第二个 B.C. 中 y 的取值范围原文误为 $0\leqslant y\leqslant 1$.——译者

(b) 证明 $(uu_x)_x + (uu_y)_y = (u_x)^2 + (u_y)^2$.

(c) 在矩形 $(0 \leqslant x \leqslant L,\ 0 \leqslant y \leqslant M)$ 上积分 (b) 中的等式, 得

$$\int_0^M \int_0^L (u_x)^2 + (u_y)^2 dxdy$$

$$= \int_0^M [u(x,y)u_x(x,y)]|_{x=0}^{x=L} dy + \int_0^L [u(x,y)u_y(x,y)]|_{y=0}^{y=M} dx. \qquad (*)$$

(d) 利用 (a) 和 (*) 得出 (*) 的左边为 0. 由此得到 $u_x = u_y = 0$, 于是 u 必恒等于常数.

10. 利用习题 9 中相同的过程, 证明矩形上的 Dirichlet 问题至多只有一个解, 其中假设 u, u_x 和 u_y 可连续地延拓到边界.

§6.3 圆环和圆盘上的 Dirichlet 问题

当区域 D 是圆环或圆盘时, 利用极坐标来解这种区域上的 Dirichlet 问题是很自然的. 平面上一点的极坐标 (r,θ) 与这点的笛卡儿坐标 (x,y) 由以下公式联系

$$x = r\cos\theta \quad 和 \quad y = r\sin\theta. \qquad (1)$$

对任意固定的点 (x,y), r 等于 $\sqrt{x^2+y^2}$, 且有无穷多个 θ 的值使得 (1) 成立. 对 $(x,y) \neq (0,0)$, 所有这些 θ 的值相差 2π, 但只有唯一的 θ 落在区间 $(-\pi,\pi]$ 内. (或者也可用区间 $[0,2\pi)$.) 因此, (1) 定义了**挖去一点的平面**(即, 整个平面去掉原点) 和所有满足 $r > 0$ 和 $-\pi < \theta \leqslant \pi$ 的配对 (r,θ) 的集合之间的一一对应. 这个对应在原点不成立, 这时 $r=0$ 而 θ 不确定. 注意到当一个移动的点 (x,y) 穿过负 x–轴时, θ 会出现一个 2π 的跳跃. 因此, θ 在负 x–轴上不是连续函数. 如果把 θ 限制在区间 $[0,2\pi)$, 则不连续性将在正 x–轴上发生, 但无法定义 θ 使得它在整个挖去一点的平面上处处是连续的. 总有一条从原点出发的不连续曲线. 如果这种不连续曲线从挖去一点的平面中去除的话, 则变换 (1) 在由此产生的区域上将是光滑可逆的. 例如, 如果不连续曲线是负 x–轴且 θ 的范围取在 $(-\pi,\pi)$, 则对任意不在该不连续曲线上的点 (x,y), 可有下面定义 (1) 的 (光滑)

逆变换

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\begin{cases}\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y\geqslant 0,\\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y<0.\end{cases}$$

然而, 极坐标在任一包含原点的区域中不能确切定义. 因此, 用极坐标表示的 Laplace 方程的解必须用笛卡儿坐标重新检验, 看它们是否在原点是有效的.

设 $u(x,y)$ 是定义在使得由 (1) 选取的极坐标 (r,θ) 有光滑的逆变换的区域上而且是 C^2 的. 用这些极坐标, 令 $U(r,\theta)\equiv u(x,y)=u(r\cos\theta,r\sin\theta)$. 在本章, 我们避免广泛滥用的极坐标符号 “$u(r,\theta)=u(x,y)$”. $u_{xx}+u_{yy}=U_{rr}+U_{\theta\theta}$ 是不真的. 而是有以下结果:

命题 1 用上述记号, 有

$$u_{xx}+u_{yy}=U_{rr}+\frac{1}{r}U_r+\frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}\quad (r>0). \tag{2}$$

证明 由链规则, 得

$$U_r=u_xx_r+u_yy_r=u_x\cos\theta+u_y\sin\theta$$

和

$$U_\theta=u_xx_\theta+u_yy_\theta=-u_xr\sin\theta+u_yr\cos\theta.$$

因此,

$$U_{rr}=u_{xx}\cos^2\theta+2u_{xy}\sin\theta\cos\theta+u_{yy}\sin^2\theta$$

和

$$\begin{aligned}U_{\theta\theta}&=-(u_{xx}x_\theta+u_{xy}y_\theta)r\sin\theta-u_xr\cos\theta+(u_{yx}x_\theta+u_{yy}y_\theta)r\cos\theta-u_yr\sin\theta\\&=r^2(u_{xx}\sin^2\theta-2u_{xy}\cos\theta\sin\theta+u_{yy}\cos^2\theta)-r(u_x\cos\theta+u_y\sin\theta).\end{aligned}$$

于是, $U_{rr}+\frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}=u_{xx}+u_{yy}-\frac{1}{r}U_r$. □

圆环上的 Dirichlet 问题

对两个固定的正数 r_i 和 $r_o(r_o > r_i)$, 令圆环 A 是内圆周 $r = r_i$ 和外圆周 $r = r_o$ 之间的开区域 (参看图 1). 不同于在极点 (0,0) 的圆盘, 圆环不包括极点, 因此不必担心在 $r = 0$ 处极坐标缺少唯一性.

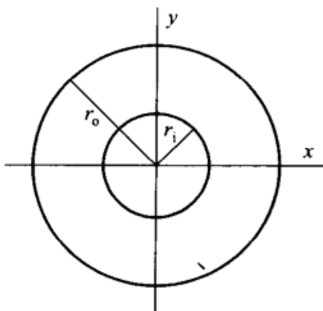


图 1

任给分别在外圆周和内圆周上连续的函数 f 和 g, Dirichlet 问题寻求在 A 上的调和函数 $u(x,y)$, 它连续地延拓到 A 的边界, 使得在 $r = r_o$ 上 $u = f$, 在 $r = r_i$ 上 $u = g$. 当以极坐标表示 Dirichlet 问题时, 其中 $-\pi < \theta \leqslant \pi$, 必须确保获得的解 $u(x,y)$ 或 $U(r,\theta)$ 当 (x,y) 穿过负 x–轴时不发生跳跃. 例如, 由命题 1, 函数 $U(r,\theta) = \theta$ 在任意不包括负 x–轴的点的开区域上是调和的, 但该函数在圆环 A 上不是调和的, 因为它在负 x–轴 $x = -r_i$ 和 $x = -r_o$ 之间的线段上不连续. 确保函数 $U(r,\theta)$ 成为 A 上的调和函数的一种方法是要求 $U(r,\theta)$ 对 $r_i < r < r_o$ 和所有实数 θ 有定义, 且是 C^2 的, 使得 (2) 的右端等于 0, 且 $U(r,\theta)$ 关于 θ 是以 2π 为周期的 (即, $U(r,\theta+2\pi) = U(r,\theta)$). 例如, 函数 $U(r,\theta) = r^2\cos\theta\sin\theta$ 满足这些要求, 由此得到调和函数 $u(x,y) = xy$. 把上述这些记住, 圆环上 Dirichlet 问题极坐标形式用下面来表达

$$
\begin{aligned}
&\text{D.E.} \quad U_{rr} + \tfrac{1}{r}U_r + \tfrac{1}{r^2}U_{\theta\theta} = 0, \quad r_i < r < r_o;\\
&\text{B.C.} \quad \begin{cases} U(r_o,\theta) = f(\theta), & f(\theta+2\pi) = f(\theta),\\ U(r_i,\theta) = g(\theta), & g(\theta+2\pi) = g(\theta); \end{cases}\\
&\text{P.C.} \quad U(r,\theta+2\pi) = U(r,\theta), \quad r_i < r < r_o.
\end{aligned} \tag{3}
$$

其中, θ 是无限制的 (即,$-\infty < \theta < \infty$), P.C. 表示**周期性条件**. 注意到连续函数

f 和 g 必须是周期的 (以 2π 为周期), 不然 P.C. 不会满足.

通常利用分离变量, 先寻求 D.E. 具形式 $U(r,\theta) = R(r)T(\theta)$ 的乘积解. 把这个形式代入 (3) 中的 D.E., 得

$$R''(r)T(\theta) + \frac{1}{\theta}R'(r)T(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)T''(\theta) = 0$$

或

$$\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = \frac{-T''(\theta)}{T(\theta)} = c = \pm b^2 \quad (b \geqslant 0).$$

关于 $T(\theta)$ 的常微是 $T''(\theta) \pm b^2T(\theta) = 0$. 只有当 $b = n$ 和 $c = +b^2 = n^2$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ 时得到以 2π 为周期的周期解. 这时, 有

$$\boxed{T_n(\theta) = a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta), \quad n = 0, 1, 2, \cdots,}$$

其中 a_n 和 b_n 是任意常数. 通过假设 $R(r)$ 具有 r^m 形式来解 $r^2R''(r) + rR'(r) - n^2R(r) = 0$, 这是 **Eular方程**的一个例子. 把 r^m 代入该常微, 得 $r^2m(m-1)r^{m-2} + rmr^{m-1} - n^2r^m = 0$ 或 $(m^2 - n^2)r^m = 0$. 因此, 如果 $m = \pm n$, r^m 是解. 对 $n \geqslant 1$, 通解为

$$\boxed{R_n(r) = c_nr^n + d_nr^{-n}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots,}$$

以及当 $n = 0$,

$$R_0(r) = c_0 + d_0\ln r,$$

(参看第 6.1 节的例 1). 上述关于 $T_n(\theta)$ 和 $R_n(r)$ 的表示式相乘, 得以下 (3) 的 D.E. 和 P.C. 的乘积解族

$$\begin{aligned} &U_0(r,\theta) = a_0 + \alpha_0\ln r \\ &U_n(r,\theta) = (a_nr^n + \alpha_nr^{-n})\cos(n\theta) + (b_nr^n + \beta_nr^{-n})\sin(n\theta), \quad n \geqslant 1. \end{aligned} \tag{4}$$

由叠加原理, (3) 的 D.E. 和 P.C. 更一般的解是

$$U(r,\theta) = U_0(r,\theta) + \sum_{n=1}^{N} U_n(r,\theta). \tag{5}$$

假设 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 是具以下形式的有限 Fourier 级数

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{N} A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta), \\
g(\theta) &= \frac{1}{2}C_0 + \sum_{n=1}^{N} C_n \cos(n\theta) + D_n \sin(n\theta).
\end{aligned} \tag{6}
$$

在方程 $U(r_o, \theta) = f(\theta)$ 和 $U(r_i, \theta) = g(\theta)$ 中比较 Fourier 系数, 得下面方程组对

$$
\begin{cases} a_0 + \alpha_0 \ln r_o = \frac{1}{2}A_0 \\ a_0 + \alpha_0 \ln r_i = \frac{1}{2}C_0 \end{cases}, \quad
\begin{cases} a_n r_o^n + \alpha_n r_o^{-n} = A_n \\ a_n r_i^n + \alpha_n r_i^{-n} = C_n \end{cases}, \quad
\begin{cases} b_n r_o^n + \beta_n r_o^{-n} = B_n \\ b_n r_i^n + \beta_n r_i^{-n} = D_n \end{cases} \tag{7}
$$

$n = 1, 2, 3, \cdots$. 在第一个组对中, 要用给定的常数 A_0 和 C_0 来解出 a_0 和 α_0, 类似地要解其他的组对. 回忆起任意方程组 (假设 $ad - bc \neq 0$)

$$
\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \quad \text{的解是} \quad \begin{cases} x = \frac{ed - fb}{ad - bc} \\ y = \frac{af - ce}{ad - bc} \end{cases}
$$

因此, 记 $Q \equiv r_o / r_i$, 我们得到

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{C_0 \ln r_o - A_0 \ln r_i}{2 \ln Q}, & \alpha_0 &= \frac{A_0 - C_0}{2 \ln Q}, \\
a_n &= \frac{A_n r_i^{-n} - C_n r_o^{-n}}{Q^n - Q^{-n}}, & \alpha_n &= \frac{C_n r_o^n - A_n r_i^n}{Q^n - Q^{-n}}, \\
b_n &= \frac{B_n r_i^{-n} - D_n r_o^{-n}}{Q^n - Q^{-n}}; & \beta_n &= \frac{D_n r_o^n - B_n r_i^n}{Q^n - Q^{-n}}.
\end{aligned} \tag{8}
$$

这给出了用给定的 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 的 Fourier 系数 A_n, B_n, C_n 和 D_n 来表示 a_n, b_n, α_n 和 β_n. 我们概括成下面结果:

命题 2 当 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 由 (6) 给出时, (3) 的解是

$$
U(r, \theta) = a_0 + \alpha_0 \ln r + \sum_{n=1}^{N} \left((a_n r^n + \alpha_n r^{-n}) \cos(n\theta) + (b_n r^n + \beta_n r^{-n}) \sin(n\theta) \right), \tag{9}
$$

其中 a_n, α_n, b_n 和 β_n 由 (8) 定义.

例 1 (圆环上的稳态温度问题) 解

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad U_{rr}+\frac{1}{r}U_r+\frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}=0,\quad 1<r<2;\\
&\text{B.C.}\begin{cases}U(2,\theta)=5\sin\theta,\\ U(1,\theta)=3+4\cos(2\theta);\end{cases}\\
&\text{P.C.}\quad U(r,\theta+2\pi)=U(r,\theta).
\end{aligned}\tag{10}$$

解 就如我们已看到的, 分离变量和叠加原理导出形式 (9) 的解. 则可以简单地对 $C_0=6$, $C_2=4$, $A_1=5$ 以及所有其他的 A_n, B_n, C_n 和 D_n 都等于 0 运用公式 (8). 注意到 $Q\equiv r_o/r_i=2$. 与其利用在命题 2 中标明的公式 (8) 我们还不如利用导出公式 (8) 的方法. 特别地, 如果使 B.C. 中的 Fourier 系数与 (9) 中利用 $r=1$ 和 $r=2$ 的 $U(r,\theta)$ 的 Fourier 系数相等, 则得 (参看 (7))

$$\begin{cases}a_0+\alpha_0\ln 2=0\\ a_0+\alpha_0\ln 1=3\end{cases},\qquad \begin{cases}2b_1+\frac{1}{2}\beta_1=5\\ b_1+\beta_1=0\end{cases},\qquad \begin{cases}2^2a_2+2^{-2}\alpha_2=0\\ a_2+\alpha_2=4\end{cases}$$

解这些方程组, 得 $a_0=3$, $\alpha_0=-\frac{3}{\ln 2}$, $b_1=\frac{10}{3}$, $\beta_1=-\frac{10}{3}$, $a_2=-\frac{4}{15}$ 和 $\alpha_2=\frac{64}{15}$. (7) 中所有其他的方程组都是零解. 则 (10) 的解是

$$U(r,\theta)=3-3\frac{\ln r}{\ln 2}+\left(\frac{10r}{3}-\frac{10}{3r}\right)\sin\theta+\left(-\frac{4r^2}{15}+\frac{64}{15r^2}\right)\cos(2\theta).\qquad\square$$

圆盘上的 Dirichlet 问题

圆心在 $(0,0)$ 半径为 r_o 的圆盘上的 Dirichlet 问题可用以下表示

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad \sqrt{x^2+y^2}<r_o\\
&\text{B.C.}\quad U(r_o,\theta)=f(\theta),\quad f(\theta+2\pi)=f(\theta).
\end{aligned}\tag{11}$$

其中 $U(r,\theta)=u(x,y)=u(r\cos\theta,r\sin\theta)$ 和 $f(\theta)$ 是给定的周期为 2π 的周期连续函数.

注记 在 (11) 中我们没有把 D.E. 用极坐标形式写出来, 因为它在圆盘 $\sqrt{x^2+y^2}<r_o$ 中的极点 $(0,0)$ 无意义. 解问题 (11) 的直觉是只要像圆环的情形那样, 但为了避免 (9) 在极点的奇性, 令 $\alpha_n=0$, $n\geqslant 0$ 和 $\beta_n=0$, $n\geqslant 1$. 则由 B.C. 确定 a_n 和 b_n, 现在只跟 $f(\theta)$ 有关. (暂时假设 $f(\theta)$ 是有限 Fourier 级数.)

虽然用这种途径确实得到 (11) 的解, 但存在潜在的困难. 在极坐标下是 C^2 的函数在 (0,0) 处未必是 C^2 的. 例如, 函数 $U(r,\theta)=r$ 似乎是好的, 但在笛卡儿坐标下, 得 $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, 它在 (0,0) 处不是 C^1 的, 因为它的图像 $z=u(x,y)$ 是以 (0,0,0) 为顶点的锥. 还注意到, 函数 $\cos(n\theta)$ 和 $\sin(n\theta)$ 在 (0,0) 不可连续定义的, 因为每个这样的函数在原点发出的射线上取值范围是 -1 到 1. 另一方面, $r^2\cos(2\theta)=x^2-y^2$ 是 C^∞ 函数. 现来证明: 一般地, $r^n\cos(n\theta)$ 和 $r^n\sin(n\theta)$ 是 x 和 y 的多项式, 因此是 C^∞ 的. 令 $z=x+iy=r\cos\theta+ir\sin\theta=re^{i\theta}$(参看第 1.1 节的 Euler 公式 (24)). 则有 **De Moivre公式**[以生于法国的英国数学家和概率论的奠基人 Abraham De Moivre(1667—1754) 命名]:

$$z^n=(re^{i\theta})^n=r^ne^{in\theta}=r^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)). \tag{12}$$

换言之,$r^n\cos(n\theta)$ 和 $r^n\sin(n\theta)$ 是乘积 $(x+iy)\cdots(x+iy)$[n 个因子] 的实部和虚部. 但如果这个乘积把它乘出来, 实部和虚部将是 x 和 y 的 n 次多项式. 这些多项式是调和的. 的确, 它们是函数 $r^n\cos(n\theta)$ 和 $r^n\sin(n\theta)$, 对 $r>0$ 是调和的, 而且在原点不会有困难, 因为多项式的二阶偏导数在 (0,0) 是连续的. □

命题 3 在 Dirichlet 问题 (11) 中, 如果

$$f(\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{N}a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta), \tag{13}$$

则问题 (11) 的解是

$$U(r,\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{N}(\frac{r}{r_o})^n(a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)). \tag{14}$$

证明 由上述的注记以及叠加原理, 得知 (14) 定义了在整个圆盘上的调和函数. 注意到如果在 (14) 的右边取 $r=r_o$, 则结果等于 $f(\theta)$, 因此 (11) 的 B.C. 满足. 由 Dirichlet 问题的唯一性定理 (参看第 6.2 节的定理 1), 得 (14) 是 (11) 的唯一解. □

例 2 求解半径为 1 的圆盘上的 Dirichlet 问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad r<1;\\&\text{B.C.}\quad U(1,\theta)=-1+8\cos^2\theta;\\&\text{P.C.}\quad U(r,\theta+2\pi)=U(r,\theta).\end{aligned}\tag{15}$$

解 $-1+8\cos^2\theta$ 的 Fourier 级数是 $3+4\cos(2\theta)$, 与例 1 中第二个① B.C. 相同. 虽然例 1 中 (10) 的解满足 B.C., 但它不是 (15) 的解, 因为与 $\ln r$, r^{-1}, r^{-2} 等有关的项在圆盘中心无定义. 我们改为利用 (14) 得到正确的解 $U(r,\theta)=3+4r^2\cos(2\theta)$. □

Poisson 积分公式

现来推导用积分表示解 (14) 的 Poisson 积分公式 (参看下面的 (20)). 我们将证明该公式导出 Dirichlet 问题 (11) 的解, 即使 (11) 中的连续函数 $f(\theta)$ 的 Fourier 级数有无穷多个非零项. 到目前为止, 我们尚未证明当 $N=\infty$ 时 (14) 仍有效, 因为如前面的章节已看到的, 叠加原理对无穷多线性组合会不成立. 然而, 作为 Poisson 积分公式的一个推论, 得知 (14) 实际上对 $r<r_o$ 都有效, 即使 $N=\infty$. 虽然下面 Poisson 积分公式的非正式推导不能代替一个严格证明 (参看下面的定理 1), 但这个推导解释了这个公式是怎样产生的.

先不严格地开始, 在 (14) 中取 $N=\infty$, 并用 f 的积分表示 f 的 Fourier 级数的系数 a_n 和 b_n, 得

$$\begin{aligned}U(r,\theta)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\{(\frac{r}{r_o})^n\big[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)dt\cos(n\theta)\\&\quad+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(nt)dt\sin(n\theta)\big]\}.\end{aligned}$$

把这些积分合并, 得

$$\begin{aligned}U(r,\theta)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\big\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{r_o})^n[\cos(nt)\cos(n\theta)+\sin(nt)\sin(n\theta)]\big\}dt\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\big\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{r_o})^n\cos(n(\theta-t))\big\}dt.\end{aligned}\tag{16}$$

①原文误为第一个.——译者

可对 (16) 中的级数如以下求和. 令 $\tau \equiv \frac{r}{r_o}[\cos(\theta-t)+i\sin(\theta-t)]$. 则 (16) 中的括号内的表示式是实部:

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{r_o})^n\cos[n(\theta-t)]=\operatorname{Re}(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\tau^n). \tag{17}$$

对 $|\tau|<1$, 几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\tau^n$(具复数项 τ^n) 收敛到 $\tau/(1-\tau)$, 且 (17) 是

$$\operatorname{Re}[\frac{1}{2}+\frac{\tau}{1-\tau}]=\frac{1}{2}\operatorname{Re}[\frac{1+\tau}{1-\tau}].$$

对任意复数 $z=a+ib\neq 0$, 有 $1/z=\bar{z}/|z|^2$, 其中 $\bar{z}=a-ib$. 因此,

$$\frac{1+\tau}{1-\tau}=\frac{(1+\tau)(1-\bar{\tau})}{|1-\tau|^2}=\frac{1-|\tau|^2}{|1-\tau|^2}+\frac{\tau-\bar{\tau}}{|1-\tau|^2}.$$

由于最后一项是纯虚数, 所以得到

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[\frac{1+\tau}{1-\tau}]&=\frac{1-|\tau|^2}{|1-\tau|^2}=\frac{1-(r/r_o)^2}{1-(\tau+\bar{\tau})+|\tau|^2}\\&=\frac{r_o^2-r^2}{r_o^2-2rr_o\cos(\theta-t)+r^2}\equiv P(r,r_o,\theta-t).\end{aligned} \tag{18}$$

表示式 $P(r,r_o,\theta-t)$ 称为 **Poisson核**. 结合 (16),(17) 和 (18), 得 **Poisson积分公式**

$$U(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(r,r_o,\theta-t)f(t)dt \quad (r<r_o). \tag{19}$$

注记 虽然上述论证间接表明 (19) 满足 Dirichlet 问题 (11), 但它不能作为一个证明, 因为我们假设 (14) 即使当 $N=\infty$ 时也是对的, 且在 (16) 中不讲理由交换了积分和无穷和. 在给出证明之前, 我们先作一些评注. (18) 中 $P(r,r_o,\theta-t)$ 的分母是极坐标中 (r,θ) 到 (r_o,t) 的距离的平方 (利用关系 $|z|^2=z\bar{z}$, 直接计算 $|re^{i\theta}-r_oe^{it}|^2$). 因此, 只要 $r<r_o$, $P(r,r_o,t-\theta)$ 是 (r,θ) 的 C^∞ 函数. 由 Leibniz 法则 (参看附录 3), 通过积分号下对 $P(r,r_o,\theta-t)$ 求导, 可对 $U(r,\theta)$ 随意求导 (关于 r 和 θ) 任意次. 特别, 通过检验对每个固定的 t, 作为 r 和 θ 的函数, $P(r,r_o,\theta-t)$ 满足 (11) 的 D.E., 我们能验证 $U(r,\theta)$ 是调和的 (关

于 $r < r_o$).(因为已经知道 $P(r, r_o, \theta - t)$ 是极坐标的光滑函数, 所以这不会有困难.) 这种检验是直接的和冗长的, 我们把它留给勤勉的读者. P 是调和的事实似乎是对的, 因为它是 (16) 中调和函数的和 (虽然是无穷和) 的两倍. 对那些熟悉复变量函数的读者的另一种考虑, 在 (18) 中我们已经把 P 表示为解析函数 $\tau = (r/r_o)e^{i(\theta-t)}$, $r < r_o$ 的实部, 因此 P 必是调和的. 总之, P 是调和函数的事实结合 Leibniz 法则得出 (19) 中的 $U(r, \theta)$ 对于 $r < r_o$ 是调和的结果. 因此, 为了确定下面的结果, 只需要验证 $U(r, \theta)$ 可连续地延拓到在边界 $r = r_o$ 上给定的函数 $f(\theta)$.

定理 1 (Poisson 积分公式)　令 $f(\theta)$ 是以 2π 为周期的连续周期函数. 定义

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(r_o^2 - r^2) f(t)}{r_o^2 - 2rr_o\cos(\theta - t) + r^2} dt \quad (r < r_o) \tag{20}$$

和

$$U(r_o, \theta) \equiv f(\theta) \quad (r = r_o). \tag{21}$$

则 $U(r, \theta)$ 在开圆盘 $r < r_o$ 上是调和的, 并在闭圆盘 $r \leqslant r_o$ 上是连续的. 换言之, $U(r, \theta)$ 满足 **Dirichlet** 问题 (11).

证明　由上述的注记, $U(r, \theta)$ 在开圆盘内是调和的. 为了得到 $U(r, \theta)$ 在闭圆盘上的连续性, 必须证明: 任给边界上的一点 (r_o, θ_0), 当 (r, θ) 趋于 (r_o, θ_0) 时 $U(r, \theta)$ 趋于 $f(\theta_0)$. 先需要证明, 对于 $r < r_o$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r_o^2 - r^2}{r_o^2 - 2rr_o\cos(\theta - t) + r^2} dt = 1. \tag{22}$$

注意到该积分与 θ 无关, 因为改变 θ 只起到对被积函数 (周期为 2π 的周期函数) 平移的作用而不改变积分值. 因此, (22) 的左边是一个调和函数 (由上述的注记, 其中 $f(\theta) \equiv 1$), 且是与 θ 无关, 于是必具有形式 $C \ln r + K$(参看第 6.1 节的例 1). 然而, 当 $r = 0$ 时 (22) 的左边显然是 1, 因此 $C = 0$ 和 $K = 1$(即,(22) 对所有的 (r, θ), $r < r_o$ 成立). 在 (22) 中用常数 $f(\theta_0)$ 相乘, 得

$$f(\theta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r, r_o, \theta - t) f(\theta_0) dt \tag{23}$$

并从 (20) 减去 (23) 的对应两边, 得

$$U(r,\theta) - f(\theta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r, r_o, \theta - t)[f(t) - f(\theta_0)] dt. \tag{24}$$

为证 $U(r,\theta)$ 在 (r_o,θ_0) 处的连续性, 必须证明通过要求 (r,θ) 充分靠近 (r_o,θ_0), (24) 的右边可任意小. (24) 中的积分区间 $[-\pi,\pi]$ 可由新的区间 $[\theta_0-\pi,\theta_0+\pi]$(长度为 2π) 替换而不改变积分值, 因为被积函数是以 2π 为周期的. 对任意的 δ, $0<\delta<\pi$, 把新区间分成三部分, 即

$$i_1=[\theta_0-\pi,\theta_0-\delta],\quad i_2=[\theta_0-\delta,\theta_0+\delta],\quad i_3=[\theta_0+\delta,\theta_0+\pi].$$

把 $\frac{1}{2\pi}P(r,r_o,\theta-t)[f(t)-f(\theta_0)]$ 关于 t 在区间 i_1 上的积分记作 I_1, 类似地定义 I_2 和 I_3. 为估计 I_2, 令 $M(\delta)$ 是当 t 在中心是 θ_0 长度为 2δ 的区间 I_2 取值时 $|f(t)-f(\theta_0)|$ 的最大值. 由于 f 在 θ_0 是连续的, 所以取 δ 充分小时可使 $M(\delta)$ 任意小. 我们有

$$|I_2|=|\frac{1}{2\pi}\int_{i_2}P(r,r_o,\theta-t)[f(t)-f(\theta_0)]dt|\leqslant\frac{M(\delta)}{2\pi}\int_{i_2}P(r,r_o,\theta-t)dt\leqslant M(\delta),\tag{25}$$

其中在最后的不等式已用了 (22) 和 $P(r,r_o,\theta-t)\geqslant 0$(对 $r<r_o$) 的事实. 为估计 I_1 和 I_3, 对于 $|x|\leqslant\sqrt{11}$, 利用$1-\cos x=x^2(\frac{1}{2}-\frac{1}{24}x^2+\cdots)\geqslant\frac{1}{24}x^2$. 为证这个不等式, 注意到对于 $x^2<12$, 级数 $\frac{1}{2}-\frac{1}{24}x^2+\frac{1}{720}x^4-\cdots$ 是项的绝对值是单减的交错级数, 因此 $\frac{1}{2}-\frac{1}{24}x^2$(在 $|x|<\sqrt{11}$ 时它 $\geqslant\frac{1}{24}$) 是整个级数的下界. 于是, 得 (对于 $|\theta-t|<\sqrt{11}$)

$$\begin{aligned}r_o^2-2r_or\cos(\theta-t)+r^2&=(r_o-r)^2+2r_or[1-\cos(\theta-t)]\\&\geqslant 2r_or[1-\cos(\theta-t)]\geqslant\frac{r_or(\theta-t)^2}{12}.\end{aligned}$$

因此, 对 $|\theta-t|<\sqrt{11}$(且因为对于 $r<r_o$, $\frac{(r_o+r)}{r_o}<2$)

$$P(r,r_o,\theta-t)\leqslant\frac{12(r_o^2-r^2)}{r_or(\theta-t)^2}\leqslant\frac{24(r_o-r)}{r(\theta-t)^2}.\tag{26}$$

令 M 是 $|f(\alpha)|$, $-\pi\leqslant\alpha\leqslant\pi$ 的最大值. (M 存在, 因为 $f(x)$ 是闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数.) 则 $|f(t)-f(\theta_0)|\leqslant 2M$. 假设 θ 与 θ_0 相距不超过 $\frac{1}{2}\delta$ (即 $|\theta-\theta_0|<\frac{1}{2}\delta$), 其中 $\frac{1}{2}\delta<\sqrt{11}-\pi\approx 0.175$. 则对 i_1 或 i_2 中的 t, 有

$$\frac{1}{2}\delta<|\theta-t|\leqslant|\theta-\theta_0|+|\theta_0-t|<\sqrt{11}-\pi+\pi=\sqrt{11}.$$

因此, 可利用 (26) 得到

$$|I_1|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{i_1}P(r,r_o,\theta-t)|f(t)-f(\theta_0)|dt\leqslant\frac{24M(r_o-r)}{r\delta^2/4}.\tag{27}$$

对 $|I_3|$ 有相同的界. 于是由 (25) 和 (27), 得

$$|I_1 + I_2 + I_3| \leqslant M(\delta) + 192M\frac{r_o - r}{r\delta^2}. \tag{28}$$

任给 $\epsilon > 0$, 可取 $\delta > 0$ 如此小, 使得 $M(\delta) < \frac{1}{2}\epsilon$. 然后取 θ 靠近 θ_0, 使得 $|\theta - \theta_0| < \min(\frac{1}{2}\delta, \sqrt{11} - \pi)$, 并取 r 充分靠近 r_o, 使得 $192(r_o - r)/(r\delta^2) < \frac{1}{2}\epsilon$, 由 (28) 和 (24) 得到 $|U(r,\theta) - f(\theta_0)| \leqslant \epsilon$. 换言之, 通过取 θ 充分接近 θ_0 和 r 充分接近 (但小于)r_o, 我们能使 $U(r,\theta)$ 任意接近 $f(\theta_0)$. □

即使对简单的函数, 积分 (20) 要精确计算都会是困难的, 但根据数值积分, 比方由 Simpson 法则, 对任意给定的 (r,θ), 可求出 (20) 的近似值. 如果 f 可能用有限 Fourier 级数表示的话, 那 (11) 的解用 (14) 表示比用 (20) 表示要方便得多. 的确, 在这种情形, 由圆盘上 Dirichlet 问题的唯一性定理, (14) 必是 (20) 的积分的结果, 如下面例子所说明的.

例 3 证明对 $r < 1$, 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-r^2)\sin t}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}dt = r\sin\theta. \tag{29}$$

解 (29) 的两边都是半径 $r_o = 1$ 的圆盘上具 B.C. $f(\theta) = \sin\theta$ 的 Dirichlet 问题的解. 由唯一性, 这两边对 $r < 1$ 必相等. 附带提及一下, (29) 对于 $r > 1$ 不总是有效的. 的确, 对 $r > 1$, 左边是 $-\frac{1}{r}\sin\theta$, 如在习题 (13) 中所证明的. □

调和函数的中值定理和正则性

现来研究 Poisson 积分公式一些值得注意的结果.

> **定理 2(中值定理)** 令 u 是在某个开区域 R 上的调和函数. 则 u 在任一包含在 R 内的闭圆盘 D 的圆心的值等于 u 在 D 的圆周边界上的平均 (或中值).

证明 通过引入极点在圆心的极坐标, 可假设 D 是圆盘 $r \leqslant r_o$. 在 D 的边界上, u 等于 $U(r_o,\theta)$. 因此, 由 $r=0$ 的 Poisson 积分公式 (20), 得

$$u(0,0) = U(0,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(0,r_o,\theta-t)U(r_o,t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}U(r_o,t)dt, \tag{30}$$

因为由 (18), $P(0,r_o,\theta-t) = 1$. 最后的积分是 u 在 D 的边界上的**中值**(或平均**值**). □

虽然在一个开区域 R 上的调和函数 u (按定义) 只要求是 C^2 的, 但如下面定理所证明的, 它实际上是 C^∞.

> **定理 3(调和函数的正则性)** 如果 u 是在某个开区域 R 上的调和函数.则 u 在 R 上是 C^∞ 的.

证明 令 p 是 R 内任意一点, 取以 p 为极点的极坐标 (r,θ). 假设 r_o 选得足够小, 使得圆盘 $r \leqslant r_o$ 包含在 R 内, 并令 $x = r\cos\theta$ 和 $y = r\sin\theta$. 现把 $P(r, r_o, \theta - t)$ 看作是 (x, y, t), $x^2 + y^2 < r_o^2$ 的函数时, 它是无穷次可微的. 的确,

$$P(r, r_o, \theta - t) = \frac{r_o^2 - x^2 - y^2}{[x - r_o \cos t]^2 + [y - r_o \sin t]^2}. \tag{31}$$

因此, 反复利用 Leibniz 法则 (参看附录 3) 得: u 在圆盘 $r < r_o$ 的所有导数可通过在 Poisson 积分公式的积分号下求导数来计算. 特别, u 关于 x 和 y 的所有偏导数在 R 内任意点 p 存在, 于是 u 在 R 上是 C^∞ 的. □

> **定理 4(无穷级数解)** 令 $f(\theta)$ 是以 2π 为周期的连续周期函数, 且FS $f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)$. 则 Dirichlet 问题
>
> $$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \sqrt{x^2+y^2} < r_o \\ &\text{B.C.} \quad U(r_o, \theta) = f(\theta) \end{aligned} \tag{32}$$
>
> 有由下面给出的 (唯一) 解 $U(r,\theta)$
>
> $$U(r,\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^\infty (\frac{r}{r_o})^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \quad (r < r_o), \tag{33}$$
>
> 而 $U(r_o, \theta)$ 定义为 $f(\theta)$.(注意到不必假设 FS $f(\theta) = f(\theta)$, 但如果这个成立,则 (33) 对 $r = r_o$ 也有效.)

证明 由唯一性定理 (参看第 6.2 节的定理 1) 和定理 1, 问题 (32) 的解 $U(r,\theta)$ 对于 $r < r_o$ 由 (20) 给出. 因此, 只需证明 (20) 和 (33) 的右边相等. 由定理 3 得到, 对任意固定的 $r < r_o$, $U(r,\theta)$ 是 θ 的 C^∞ 周期函数. 因此, 由第四章的收敛性定理 (例如, 第 4.2 节的定理 1), 可知对固定的 $r < r_o$, $U(r,\theta)$ 的 Fourier 级数收敛到 $U(r,\theta)$. 于是, 只要证明 $U(r,\theta)$ 的 Fourier 级数等于 (33) 的

右边即可. 计算 $U(r,\theta)$ 的 Fourier 系数 $a_n(r)$

$$\begin{aligned} a_n(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(r,\theta)\cos(n\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} P(r,r_o,\theta-t)f(t)dt\right)\cos(n\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} P(r,r_o,\theta-t)\cos(n\theta)d\theta\right)f(t)dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{r}{r_o}\right)^n\cos(n\theta)f(t)dt = \left(\frac{r}{r_o}\right)^n a_n,$$

其中我们交换了积分次序 (参看附录 2) 并利用了具边界函数 $\cos(n\theta)$ 的 Dirichlet 问题的解是 $(\frac{r}{r_o})^n\cos(n\theta)$ 的事实. 类似的计算得出关于 $b_n(r)$ 的结果. □

注记 注意到当 (33) 右边的第 n 项用 x 和 y 来表示时, 它是 x 和 y 的 n 次多项式. 因此, 定理 4 告诉我们, 一个在闭圆盘上连续, 在其内部调和的函数在圆盘的内部等于关于 x 和 y 的一个幂级数 (即, 调和函数是关于 x 和 y 是**实解析的**). (这里已假设 x 和 y 的坐标是如此选取, 使得圆盘的圆心, 比如 p 成为原点.) 由高等微积分的一个基本结果, 该幂级数必是 u 在 p 处的 Taylor 级数. 因此, 如果所有 u 在 p 处的偏导数为零, 则 u 在整个圆盘必为常数. □

概要 6.3

1. 极坐标形式的 Laplace 运算: 在区域上的一个 C^2 函数 $u(x,y)$, 以极坐标表示 $u(x,y)=U(r,\theta)$, 我们有

$$U_{xx}+U_{yy}=U_{rr}+\frac{1}{r}U_r+\frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}.$$

2. 圆环上的 Dirichlet 问题: 圆环上的 Dirichlet 问题可用以下极坐标表示

$$\begin{aligned} &\text{D.E}\quad U_{rr}+\tfrac{1}{r}U_r+\tfrac{1}{r^2}U_{\theta\theta}=0,\quad r_i<r<r_o; \\ &\text{B.C.}\begin{cases} U(r_o,\theta)=f(\theta), & f(\theta+2\pi)=f(\theta), \\ U(r_i,\theta)=g(\theta), & g(\theta+2\pi)=g(\theta); \end{cases} \\ &\text{P.C.}\quad U(r,\theta+2\pi)=U(r,\theta)\quad r_i<r<r_o. \end{aligned}\tag{S1}$$

这里 “P.C.” 表示 “周期性条件.” 如果 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 是有限 Fourier 级数, 则 (S1) 的解具有形式 (参看命题 2)

$$U(r,\theta) = a_0 + \alpha_0 \ln r + \sum_{n=1}^{N} U_n(r,\theta), \tag{S2}$$

其中 $U_n(r,\theta) = (a_n r^n + \alpha_n r^{-n})\cos(n\theta) + (b_n r^n + \beta_n r^{-n})\sin(n\theta), \quad n \geqslant 1$, 且系数 a_n, b_n, α_n 和 β_n 由公式 (8) 中 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 的 Fourier 系数给出.

3. 圆盘上的 Dirichlet 问题: 半径为 r_o, 圆心在 $(0,0)$ 的圆盘上的 Dirichlet 问题可表示为

$$\begin{aligned} &\text{D.E} \quad u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \sqrt{x^2+y^2} < r_o; \\ &\text{B.C.} \quad U(r_o,\theta) = f(\theta), \quad f(\theta+2\pi) = f(\theta), \end{aligned} \tag{S3}$$

其中 $U(r,\theta) = u(x,y) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $f(\theta)$ 是给定的连续周期函数. 若 $f(\theta)$ 具有形式

$$f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta), \tag{S4}$$

则 (S3) 的解为

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} (\frac{r}{r_o})^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)). \tag{S5}$$

(S3) 的解也能用 Poisson 积分公式来表示, Poisson 积分公式反过来能用于验证公式 (S5)(对于 $r < r_o$) 当 $N = \infty$ 以及 $f(\theta)$ 是连续时的正确性 (参看定理 4).

4. Poisson 积分公式 (定理 1): 令 $f(\theta)$ 是以 2π 为周期的连续周期函数. 定义 $U(r_o,\theta) = f(\theta)$ 并置

$$U(r,\theta) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(r_o^2 - r^2) f(t)}{r_o^2 - 2 r r_o \cos(\theta - t) + r^2} dt \quad (r < r_o). \tag{S6}$$

则 $U(r,\theta)$ 在开圆盘 $r < r_o$ 上是调和的, 在闭圆盘 $r \leqslant r_o$ 上是连续的. 换句话说, $U(r,\theta)$ 满足 Dirichlet 问题 (S3).

5. 中值定理 (定理 2): 设 u 是在某个开区域 R 上的调和函数. 则 u 在任一包含在 R 内的闭圆盘 D 的圆心的值等于 u 在 D 的圆周边界上的平均 (或中值).

6. 调和函数的正则性 (定理 3): 如果 u 在某个开区域 R 上是调和的, 则 u 在 R 上是 C^∞ 的. 的确, u 在 R 上是实解析的.

练习 6.3

1. 解圆环上 Dirichlet 问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E} \quad U_{rr}+\frac{1}{r}U_r+\frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}=0, \quad 1<r<2;\\&\text{B.C.} \quad U(2,\theta)=f(\theta), \quad U(1,\theta)=g(\theta);\\&\text{P.C.} \quad U(r,\theta+2\pi)=U(r,\theta),\end{aligned}$$

(a) 当 $f(\theta)=1+2\cos\theta+\cos(2\theta)$ 和 $g(\theta)=\sin(2\theta)$ 时;
(b) 当 $f(\theta)=\sin^2\theta$ 和 $g(\theta)=\sin\theta\cos\theta$ 时;
(c) 当 $f(\theta)=a$ 和 $g(\theta)=b$ 时, 其中 a 和 b 是常数;
(d) 当 $f(\theta)=a\sin(3\theta)$ 和 $g(\theta)=b\sin(3\theta)$ 时, 其中 a 和 b 是常数;
(e) 当 $f(\theta)=1+3\cos\theta-17\sin(8\theta)$ 和 $g(\theta)=0$ 时.

2. (a) 证明定义在圆环 $r_i<r<r_o$ 上的任一具有形式 $U(r,\theta)=h(\theta)$ 的调和函数 (即与 r 无关) 必为常数, 即与 θ 也无关.
(b) 假设 (a) 中的调和函数只要求定义在圆环的上部 $(0<\theta<\pi)$. 证明在这种情形 $h(\theta)$ 不必是常数. 如果 $h(0)=a$ 和 $h(\pi)=b$, 则对于 $0<\theta<\pi$, $h(\theta)$ 等于什么?

3. 解圆盘 $r\leqslant 2$ 上的 Dirichlet 问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E} \quad u_{xx}+u_{yy}=0, \quad (x^2+y^2<4)\\&\text{B.C.} \quad U(2,\theta)=f(\theta), \quad f(\theta+2\pi)=f(\theta),\end{aligned}$$

其中 $f(\theta)$ 是由习题 1 的各部分给出. 为什么这里不能只利用习题 1 中的答案来解上述问题?

4. (a) 利用 Poisson 积分公式, 当 $f(\theta)=\theta^2$, $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$ 时写出习题 3 中的问题的解.
(b) 用形如定理 4 中 (33) 的无穷级数来表示 (a) 中的解. 这只是一个形式解还是一个精确解?
(c) 为了在整个圆盘 $r\leqslant 2$ 上在误差 0.01 之内逼近精确解, 估计 (b) 中的级数所需的项数.

5. (a) 利用 (22) 来计算积分 $\int_{-\pi}^{\pi}[1-a\cos x]^{-1}dx$, 其中 $0<a<1$.
(b) 利用 Poisson 积分公式来计算积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)}{1-a\cos x}dx,$$

其中 $f(x)$ 是

(i) $\cos(nx)$, $n=0,1,2,\cdots$; (ii) $\sin^2 x$; (iii) $\cos^3 x$.

6. 设 $U_1(r,\theta)$ 和 $U_2(r,\theta)$ 满足圆盘 $r \leqslant r_o$ 上 Dirichlet 问题且 $U_1(r_o,\theta)=f_1(\theta)$ 和 $U_2(r_o,\theta)=f_2(\theta)$.[①]不求助于最大值最小值原理, 利用 Poisson 积分公式推断

$$\text{如果 } |f_1(\theta)-f_2(\theta)| \leqslant \epsilon, \quad \text{则} \quad |U_1(r,\theta)-U_2(r,\theta)| \leqslant \epsilon, \quad r<r_o.$$

换言之, 在圆周上靠近的调和函数在圆盘上将是靠近的.

提示 利用 (22) 以及 $P(r,r_o,\theta-t) \geqslant 0$ 的事实.

7. (a) 假设 $U(r,\theta)$ 在圆盘 $r<r_o$ 内是调和的, 令 $V(r,\theta)=U(Rr,\theta)$, 其中 $R>0$ 是常数. 证明 V 在圆盘 $r<r_o/R$ 内是调和的.

(b) 假设 $R<1$, 利用 Poisson 积分公式和 (a) 推导

$$U(Rr,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,r_o,\theta-t)U(Rr_o,t)dt.$$

8. 证明对于 $0<r_1<r_2<r_3$, Poisson 核 (参看 (18)) 具有下面 "卷积" 性质:

$$P(r_1,r_3,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r_1,r_2,\theta-t)P(r_2,r_3,t)dt.$$

提示 左边是关于 $r_1<r_3$ 的 (r_1,θ) 的调和函数. 在圆盘 $r \leqslant r_2$ 上对该函数运用 Poisson 积分公式.

9. 一块几乎是平的导热板是以半径是 5 的圆盘的形状. 假设该板在两面上是绝热的. 板的边界给定一个形如 $f(\theta)=10\theta^2$ 的稳态温度分布, 其中中心角 θ 的取值范围是 $-\pi$ 到 π. 该稳态温度在板的中心等于多少?

10. 求以下 Neumann 问题的解 $U(r,\theta)$

$$\begin{aligned}&\text{D.E} \quad u_{xx}+u_{yy}=0, \quad x^2+y^2<r_o^2;\\&\text{B.C.} \quad U_r(r_o,\theta)=f(\theta);\\&\text{P.C.} \quad U(r,\theta+2\pi)=U(r,\theta),\end{aligned}$$

其中 $f(\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{N} a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)$, 且 N 是有限的以及 $a_0=0$. 为什么必须假设 $a_0=0$?

11. 为了得到圆环 $(r_i<r<r_o)$ 上 Neumann 问题, 在 (3) 的 B.C. 中以 U_r 替换 U. 然后取 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 如 (6).

(a) 关于 A_0 和 C_0 在什么条件下 Neumann 问题解存在?

(b) 在 (a) 的条件下, 求圆环上 Neumann 问题的解.

[①]原文误为 $U_2(r,\theta)=f_2(\theta)$.——译者

提示 通过注意到如果 $U(r,\theta)$ 满足 $r^{-1}(rU_r)_r + r^{-2}U_{\theta\theta} = 0$, 则 $V = rU_r$ 满足 $r^{-1}(rV_r)_r + r^{-2}V_{\theta\theta} = 0$, 可以免去很多工作. 因此, 利用前面的公式 (8), 解关于 V 具有 B.C. $V(r_o,\theta) = r_o f(\theta)$ 和 $V(r_i,\theta) = r_i g(\theta)$ 的 Dirichlet 问题, 然后除以 r 并关于 r 积分, 得到 Neumann 问题期望的解 U.

(c) 令 $V(r,\theta)$ 是一固定的 Neumann 问题的任意两个解的差. 利用 D.E. 证明 $r^{-1}[r(VV_r)]_r + r^{-2}(VV_\theta)_\theta = (V_r)^2 + r^{-2}(V_\theta)^2$. 关于面积元素 $rdrd\theta$ 在圆环 $r_1 < r < r_o$ 上该结果积分来推断 V 必是常数 (参看第 6.2 节中的习题 9).

12. (a) 证明对于 $r < r_o$, 有

$$\frac{r_o - r}{r_o + r} \leqslant \frac{r_o^2 - r^2}{r_o^2 - 2rr_o\cos(\theta - t) + r^2} \leqslant \frac{r_o + r}{r_o - r}.$$

(b) 利用 (a) 中的结果推断: 如果 u 在开圆盘 $r < r_o$ 内调和, 在闭圆盘 $r \leqslant r_o$ 上连续, 且是非负的, 则 **Harnack 不等式**成立:

$$\frac{r_o - r}{r_o + r}u(0,0) \leqslant U(r,\theta) \leqslant \frac{r_o + r}{r_o - r}u(0,0) \quad (r < r_o).$$

(c) 利用 Harnack 不等式证明对所有 (x,y) 有定义的非负调和函数 $u(x,y)$ 必是常数.

提示 在 (b) 中考虑大的 r_o.

(d) 利用 (c) 证明对所有 (x,y) 有定义的非常值的调和函数的图像 $z = u(x,y)$ 必与每个水平面 $z =$ 常数 相交 (即,u 的值域是全体实数的集合.). 特别, 如果存在一个常数 M, 使得对所有的 (x,y), $|u(x,y)| \leqslant M$ (即 u 是有界的), 则 $u =$ 常数.

13. (a) 证明

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 - r^2)\sin t}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}dt = -\frac{1}{r}\sin\theta, \quad r > 1.$$

提示 令 $\rho = \frac{1}{r} < 1$ 并验证 $P(r,1,\theta - t) = -P(\rho,1,\theta - t)$.

(b) 更一般地, 证明如果

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,r_o,\theta - t)f(t)dt, \quad r < r_o,$$

其中 $f(t)$ 是连续函数, 则对 $r > r_o$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,r_o,\theta - t)f(t)dt = -U(\frac{r_o^2}{r},\theta).$$

(c) 取 $U(r,\theta)$ 如 (b) 中所示, 证明 $V(r,\theta) = U(\frac{r_o^2}{r},\theta)$ 对于 $r > r_o$ 是调和的, 且 $V(r,\theta)$ 连续地延拓到圆周 $r = r_o$ 上的函数 $f(\theta)$. $\lim_{r\to\infty} V(r,\theta)$ 等于什么?

§6.4 Dirichlet 问题的最大值原理和唯一性

在前面的章节中, 我们已经看到最大值最小值原理 (或简单地称为最大值原理) 以及它的推论, 唯一性定理是很有用的结果. 没有唯一性, 我们就无法像多次谈到的那样, 提及 Dirichlet 问题的解. 而且有些地方唯一性以更隐晦的方式表示. 例如, 中值定理 (第 6.3 节的定理 2) 的证明用到事实: 每个调和函数可由在一个适当的圆盘上的 Poisson 积分公式给出, 但这就假设了唯一性. 同样的理由, 在证明调和函数是 C^∞(参看第 6.3 节[①]定理 3) 中, 我们已经用了唯一性. 另外, 最大值原理可用来以 Dirichlet 问题解在边值上的差来估计它们的差. 这种估计在应用上很重要 (参看第 6.2 节的例 5). 在证明最大值原理之前, 我们先来回顾一些术语.

xy–平面上一个子集 D 是**开的**, 如果 D 中的每点是某个完全包含在 D 内的圆盘 (具有正半径) 的圆心. 点 p 是 xy–平面的某个子集 E 的**边界点**, 如果每个以 p 为圆心的圆盘含有 E 中的点也含有不在 E 中的点. E 的一个边界点不必是属于 E 的. 的确, 开集不含有它的任意边界点. 一个集合包含它所有边界点的称为**闭集**. E 的所有边界点的集合称为 E 的**边界**. 集合 E 的**闭包**是闭集 $\overline{E}$, 它由或是 E 中的点或是 E 的边界中的点组成. 例如, 如果 D 是开圆盘 $r<1$, 则 D 是开集, 圆周 $r=1$ 是 D 的边界, 而 $\overline{D}$ 是闭圆盘 $r\leqslant 1$. 非空集 E 的**直径**是 E 中各对点之间的最大距离 (如果这种最大距离存在的话). 因此一个矩形 (开的或闭的) 的直径是对角线的长度, 而一个圆盘的直径就是通常意义下的直径. 如果 E 中存在可相隔任意远的点, 则 E 的直径称为是无穷的, 并称 E 是**无界的**(例如, 半平面, 或一个圆周的外部). 如果 E 的直径是有限的, 则称 E 是**有界的**. 这个标准术语会是很微妙的. 例如, 一个无界集能包括它的边界 (例如, 闭半平面 $y\geqslant 0$). 另外, x–轴上的开区间不是 xy–平面的开子集. 一子集 E 称为 (道路)**连通的**, 如果 E 中任意两点可用一条完全包含在 E 中的连续曲线相连接.

本节将用到的一个事实是: 在一个闭的和有界的集合上连续的函数在该集合中的某点达到最大值 (参看附录 4). 关于调和函数该事实的一个重大改进是**最大值原理**. 最大值原理表明, 如果 D 是一个有界开集, u 是 $\overline{D}$ 上的连续函数并且是 D 上的调和函数, 则 u 在 D 的边界上达到它的最大值. 函数 u 也在 D 的某点取到它的最大值是可能的. 然而, 最大值原理的一个更强的形式 (**强最大值原理**) 表明: 在这种情形, 如果 D 是连通开集, 则 u 必恒等于常数. 虽然我

①原文误为第 6.2 节.——译者

们考虑的是二维的情形, 但注意到在一维情形关于调和函数 $u=f(x)$ 对应的强最大值原理完全是平凡的. 的确, 在一维情形, Laplace 方程是 $f''(x)=0$, 由此, $f(x)=ax+b$. 在任意闭区间 (有界的, 闭的直线的子集) 上这样的函数在一个端点上达到它的最大值. 而且, 如果 $f(x)$ 还在区间的内部达到它的最大值, 则显然 $f(x)$ 是常数. 当然在二维情形, 情况更复杂. 作为一个特殊的说明最大值原理的例子, 见第 6.2 节的例 3. 作为初步揭示对一个非常数的调和函数不可能出现局部最大值, 我们提供下面的例子.

例 1 令 $u(x,y)$ 是在某个开区域 D 上的调和函数. 证明如果 u 在某点 $p=(x_0,y_0)$ 具有局部最大值, 则 u 在 p 处的所有一阶和二阶偏导数必为零 (即, 图像在 p 处是 "二阶" 水平和平坦的).

解 如果 u 在 p 处有局部最大值, 则可知 u_x 和 u_y 在 p 处为零. 由于 u 的图像在任意方向不会是凹的, 所以 u 在 p 处在任意方向 $\cos\theta\mathbf{i}+\sin\theta\mathbf{j}$ 的二阶方向导数必是非正的, 即

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{dt^2}u(x_0+t\cos\theta,y_0+t\sin\theta)|_{t=0}\\&=\cos^2\theta u_{xx}(p)+2\sin\theta\cos\theta u_{xy}(p)+\sin^2\theta u_{yy}(p)\leqslant 0.\end{aligned}\tag{1}$$

置 $\theta=0$, 得到 $u_{xx}(p)\leqslant 0$. 取 $\theta=\frac{\pi}{2}$, 得 $u_{yy}(p)\leqslant 0$. 则 Laplace 方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 隐含 $u_{xx}(p)=0$ 和 $u_{yy}(p)=0$ (为什么?). 在 (1) 中取 $\theta=\frac{\pi}{4}$, 得 $u_{xy}\leqslant 0$, 而取 $\theta=-\frac{\pi}{4}$, 得 $-u_{xy}(p)\leqslant 0$. 因此, 还有 $u_{xy}(p)=0$. □

定理 1 (最大值最小值原理) 令 $u=u(x,y)$ 是定义在 $\overline{D}$ 上的连续函数, 其中D 是 xy–平面的任一非空的有界开子集. 如果 u 在 D 上是调和的, 则 u 的最大值和最小值在 D 的边界上达到.

证明 我们知道 (参看附录 4)u 的最大值在 $\overline{D}$ 中某点达到, 因为 u 在闭有界集 $\overline{D}$ 上连续. 用反证法来证本定理. 假设最大值不在边界上达到. 则最大值在 D 内某点 (x_0,y_0) 达到, 设 $M\equiv u(x_0,y_0)>M_b$, 其中 M_b 是 u 在 D 的边界上的最大值. 对某个常数 $\epsilon>0$, 令

$$v(x,y)=u(x,y)+\epsilon[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2].\tag{2}$$

则 $v(x_0,y_0)=u(x_0,y_0)=M$, 且 v 在 D 的边界上的最大值不超过 $M_b+\epsilon d^2$, 其中 d 是 D 的直径. 对充分小的 ϵ, 有 $M>M_b+\epsilon d^2$(即, $0<\epsilon<(M-M_b)/d^2$).

对这样的 ϵ, v 的最大值不会在 D 的边界上发生, 因为 v 在 (x_0, y_0) 处的值大于 v 在任一边界点上的值. 然而, 在 D 内会存在点, 使得在这些点上 v 大于等于 M. 设 v 的最大值在 (x_1, y_1) 处达到, 该点 (如我们所看到的) 必在 D 内. 在 (x_1, y_1) 处, 必有 $v_{xx} \leqslant 0$ 和 $v_{yy} \leqslant 0$, 因为 v 的图像在 (x_1, y_1) 处在 x 或 y 方向不会是凹的. 因此, 在 (x_1, y_1) 处, 有 $v_{xx} + v_{yy} \leqslant 0$. 然而, 由 (2), 得 $v_{xx} + v_{yy} = u_{xx} + u_{yy} + 2\epsilon + 2\epsilon = 4\epsilon > 0$, 其中我们最后用了 u 在 D 上是调和的假设. 因此, 得到矛盾, 我们最初 u 的最大值不在边界上达到的假设不成立. 由于 u 的最小值是函数 $-u$(也是在 D 上调和的) 的最大值的负数, 所以由上述关于最大值的结果, u 的最小值也在 D 的边界上达到. □

注记 注意到在上述的证明中, 我们没有用到前面章节的任何结果. 下面的唯一性定理是最大值原理的一个直接推论, 因此我们避免了任一循环的推理 (即, 唯一性的证明不牵涉到利用前面的假设唯一性成立的结果). □

定理 2 (Dirichlet 问题的唯一性定理) 对 xy–平面上任一非空有界开子集 D. 设 u_1 和 u_2 在 $\overline{D}$ 上是连续函数, 在 D 上是调和的. 如果 u_1 和 u_2 在 D 的所有边界点是相等的, 则在整个 $\overline{D}$ 上它们是相等的. 换言之, D 上 Dirichlet 问题至多只有一个解.

证明 差 $v = u_1 - u_2$ 是在 $\overline{D}$ 上的连续函数, 在 D 上是调和的. 由于在 D 的边界上 $v = 0$, 所以最大值最小值原理隐含 $v \leqslant 0$ 和 $v \geqslant 0$. 因此, 在 $\overline{D}$ 上 $v = 0$, 即在 $\overline{D}$ 上 $u_1 = u_2$. □

接下来我们证明, 在一个有界开集 D 上 Dirichlet 问题中, 如果边界上指定的函数改变不超过 ϵ, 则解 (如果存在的话) 在整个 D 中变化不超过 ϵ. 粗略地说来, 解连续地依赖于边界数据.

定理 3 (解对边界数据的连续依赖性) 令 $u_i(\ i = 1, 2)$ 是 Dirichlet 问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad \triangle u_i = 0 \quad \text{于 } D\text{上} \\ &\text{B.C.} \quad u_i = f_i \quad \text{于 } C\text{上} \end{aligned}$$

的解 (假设存在), 其中 C 是有界开集 D 的边界. 如果 M 是 $|f_1 - f_2|$ 在 C 上的最大值, 则对 $\overline{D}$ 中所有的 (x, y), 有 $|u_1(x, y) - u_2(x, y)| \leqslant M$.

证明 令 $v = u_1 - u_2$. 对 $\overline{D}$ 中所有的 (x, y), 有

$$-\max_C(|f_1 - f_2|) \leqslant \min_C(f_1 - f_2) \leqslant v(x, y) \leqslant \max_C(f_1 - f_2) \leqslant \max_C(|f_1 - f_2|),$$

其中第一个和最后一个不等式是显然的, 把最大值最小值原理运用到 v, 得到中间两个不等式. 因此 $-M \leqslant v(x, y) \leqslant M$, 以及对 $\overline{D}$ 中所有的 (x, y), $|v(x, y)| \leqslant M$. □

注记 当 $f_1 = f_2$ 时, 我们有 $M = 0$, 于是唯一性定理 (定理 2) 作为定理 3 的一个推论. □

例 2 设 u 是任一在整个 xy 平面上非常值的调和函数. 由第 6.3 节习题 12(d) 得知 u 的零水平集 $\{(x, y)|u(x, y) = 0\}$ 是非空的. 证明该水平集不会含有任意圆周.

解 如果可能含有一圆周的话, 调和函数 u 将成为由该圆周所围的圆盘 D 上 Dirichlet 问题的解, 其中边值数据为零. 由唯一性定理, u 在整个圆盘 D 上为 0. 下面证明在整个 xy–平面上 $u \equiv 0$. 注意到在 D 的圆心 p, u 的所有偏导数等于零. 因此, u 在 p 处的 Taylor 级数为零. 然而, 由第 6.3 节定理 4 后面的注记, 在 u 调和的任意圆盘上, u 等于它在圆心的 Taylor 级数. 由于 u 在 xy–平面上调和, 所以它在 p 处的任意大的圆盘上是调和的. 因此, u 在 p 处的 Taylor 级数为零推得在整个平面上 $u = 0$. 同样的论证本质上证明 $u(x, y)$ 的零点集合不会包含任一有界开集的边界. □

例 3 假设 $u(x, y)$ 是在闭圆盘 $r \leqslant 1$ 上的连续函数, 且在开圆盘 $r < 1$ 上是调和的. 如果 $u(\cos\theta, \sin\theta) \leqslant \sin\theta + \cos(2\theta)$, 则证明对所有满足 $x^2 + y^2 \leqslant 1$ 的 (x, y), 有 $u(x, y) \leqslant y + x^2 - y^2$.

解 注意到 $v(x, y) = y + x^2 - y^2$ 是满足 $v(\cos\theta, \sin\theta) = \sin\theta + \cos(2\theta)$ 的调和函数. 由假设, 在圆盘 $r \leqslant 1$ 的边界上 $u \leqslant v$. 因此, 调和函数 $u - v$ 在边界 $r = 1$ 上的最大值必小于等于零. 则最大值原理隐含在整个圆盘上 $u \leqslant v$, 正如所期望的. □

例 4 (Poisson 核的唯一性) 假设对每个以 2π 为周期的连续周期函数 $f(\theta)$, 圆盘 $r \leqslant r_o$ 上具边界条件 $U(r_o, \theta) = f(\theta)$ 的 Dirichlet 问题的解由以下公式给出:

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q(r, r_o, \theta - t) f(t) dt. \tag{3}$$

对某个函数 $Q(r, r_o, \theta - t)$, 该函数是连续的且关于 t 是以 2π 为周期的, 证明对

所有的 $r < r_o$ 以及所有的 θ 和 t, $Q(r,r_o,\theta-t)$ 等于 Poisson 核 $P(r,r_o,\theta-t)$.

解 因为 Dirichlet 问题的解 U 是唯一的, 所以得知, 如果以 P 替换 Q, (3) 成立. 因此, 有

$$0 = U(r,\theta) - U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[P(r,r_o,\theta-t) - Q(r,r_o,\theta-t)]f(t)dt.$$

对任意固定的 θ 和 $r < r_o$, 令 $f(t) = P(r,r_o,\theta-t) - Q(r,r_o,\theta-t)$ 是最后的积分中的连续周期函数. 则得到 $\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)]^2dt = 0$, 由此, $f(t) = 0$, $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$. 由于 $f(t)$ 是以 2π 为周期的, 则得知对所有的 t, $f(t) = 0$. □

强最大值最小值原理

强最大值最小值原理表明, 如果在某个连通开集 D 上的调和函数 u 在 D 内达到最大值或最小值, 则 u 在 D 上必恒等于常数. D 不必是有界的或 u 不必连续地延拓到 D 的边界. 本子节的目的是证明这个结果. 用到的主要工具是中值定理, 中值定理是作为 Poisson 积分公式 (参看第 6.3 节的定理 2) 的推论而建立的. 接下来我们证明, 不用积分公式, 用初等方式证明中值定理也是可能的 (而且是有启发性的). 这另一种证法基于以下的结果, 其中我们写成 $U(r,\theta) = u(x,y)$(参看第 6.3 节).

引理 1 对定义在圆盘 $D(\ r \leqslant R)$ 上的任意 C^2 函数 $u(x,y)$, 有公式

$$\iint_D (u_{xx} + u_{yy})dxdy = \int_0^{2\pi} U_r(R,\theta)Rd\theta. \tag{4}$$

换言之, u 的 Laplace 算式在圆盘上的积分等于 u 的法向导数沿着边界关于弧长微分 $ds = Rd\theta$ 的积分.

证明 用极坐标计算 (4) 的左边,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^R (U_{rr}+\frac{1}{r}U_r+\frac{1}{r^2}U_{\theta\theta})rdrd\theta\\
&=\int_0^{2\pi}\int_0^R(rU_{rr}+U_r)drd\theta+\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{1}{r}U_{\theta\theta}drd\theta\\
&=\int_0^{2\pi}\int_0^R(rU_r)_rdrd\theta+\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{1}{r}U_{\theta\theta}d\theta dr\\
&=\int_0^{2\pi}(rU_r)|_0^Rd\theta+\int_0^R\frac{1}{r}U_\theta(r,\theta)\Big|_0^{2\pi}dr\\
&=\int_0^{2\pi}RU_r(R,\theta)d\theta+\int_0^R\frac{U_\theta(r,2\pi)-U_\theta(r,0)}{r}dr. \qquad (5)
\end{aligned}$$

然而 (5) 的右边就是 (4) 的右边, 因为由于 U(因此 U_θ) 关于 θ 是以 2π 为周期的事实, (5) 中右边的第二项是 0. 为了证明积分次序的变换 (参看附录 2) 是正确的, 我们注意到 $r^{-1}U_{\theta\theta}$ 中的显然的奇性是可去的, 因为 (根据第 6.3 节命题 1 的证明)$r^{-1}U_{\theta\theta}$ 在 $r\theta$ 平面中的矩形 $0<r<R$, $0<\theta<2\pi$ 的边 $r=0$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 上连续地延拓到 $-u_x(0,0)\cos\theta-u_y(0,0)\sin\theta$. □

中值定理(第 6.3 节的定理 2) 的另一种证明

若 u 是引理 1 中的调和函数, 则 (4) 的左边为 0, 由此 (由附录 3 中的 Leibniz 法则)

$$0=\int_0^{2\pi}U_r(R,\theta)d\theta=\frac{d}{dR}(\int_0^{2\pi}U(R,\theta)d\theta).$$

因此, $\int_0^{2\pi}U(R,\theta)d\theta$ 是 R 的常数值函数. 该函数在 $R=0$ 处等于 $2\pi u(0,0)$, 于是中值定理成立. □

注记 引理 1 以非常一般形式成立. 的确, 令 D 是有界开集, 其边界 C 由有限多条光滑简单封闭曲线组成 (例如像瑞士硬干酪片), 并令 u 在 D 上是 C^2 函数. 则由 Green 定理, 有下面 (4) 的推广

$$\iint_D\triangle udxdy=\int_C\nabla u\cdot\mathbf{n}ds, \qquad (6)$$

其中 $\mathbf{n}$ 是单位外法向, ds 是弧长元素. 对矩形, 第 6.2 节的例 6 证明了 (6) 成立. 作为一个直接推论, 得 Neumann 问题的相容性条件

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad \triangle u=0,\quad 于\ D上;\\
&\text{B.C.}\quad \nabla u\cdot\mathbf{n}=g,\quad 于\ C上,
\end{aligned}$$

即

$$\int_C g ds = 0.$$ □

例 5 设 $u(x,y)$ 在圆盘 $x^2+y^2<r_0^2$ 内是调和的. 若 u 在点 $(0,0)$ 达到它的最大值, 则证明 u 在整个圆盘必是常数.

解 由中值定理 (参看第 6.2 节的定理 2), 有 (对任意 $r<r_0$),

$$\int_0^{2\pi} u(0,0)d\theta = 2\pi u(0,0) = \int_0^{2\pi} U(r,\theta)d\theta.$$

相减, 得 $\int_0^{2\pi}[u(0,0)-U(r,\theta)]d\theta=0$. 由于被积函数 $u(0,0)-U(r,\theta)$ 是连续的和非负的 (由假设 u 的最大值在 $(0,0)$ 处达到), 所以作为 θ 的函数, 有 $u(0,0)-U(r,\theta)\equiv 0$. 因此, 对任意 $r<r_0$, $U(r,\theta)\equiv u(0,0)$, 于是 u 在整个圆盘 $r<r_0$ 是常数. □

定理 4 (强最大值最小值原理) 设 u 在连通开集 D 上是调和函数. 假设 u 的最大值或最小值在 D 内某点达到. 则 u 在整个 D 上必是常数.

证明 令 p 是 D 中 u 取到最大值的点, 记最大值为 M, 令 q 是 D 中任意其他的点. 由于 D 是连通的, 可用一曲线连接 p 和 q, 设该曲线的参数化为 $(x(t),y(t))$, 其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是 $0\leqslant t\leqslant 1$ 的连续函数, 且有 $p=(x(0),y(0))$ 和 $q=(x(1),y(1))$. 我们必须证明 $u(q)=M$. 令 $S=\{t\in[0,1];\ u(x(t),y(t))=M\}$. 显然, $0\in S$, 但需要证明 $1\in S$. 令 t_0 是最小的大于或等于所有 S 中的数的实数.(由于 S 是有界的, 这样的 t_0 的存在性由实数系统的一个公理, **上确界公理**来保证. 必须证明 t_0 属于 S 且 $t_0=1$. 对每个正整数 n, 由 t_0 的定义, 存在 S 中的数 t_n, 使得 $t_0-t_n\leqslant\frac{1}{n}$. 由 $u(x(t),y(t))$ 的连续性, 得

$$u(x(t_0),y(t_0)) = \lim_{n\to\infty} u(x(t_n),y(t_n)) = M.$$

因此, $t_0\in S$ 且 u 在 $(x(t_0),y(t_0))$ 处取到最大值. 令 D_0 是以 $(x(t_0),y(t_0))$ 为圆心, 完全包含在 D 内的开圆盘. 根据例 5, 在 D_0 上 $u\equiv M$. 现我们用反证法证明 $t_0=1$. 如果 $t_0<1$, 则由 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的连续性, 得知对充分小的 $\delta>0$, $(x(t_0+\delta),y(t_0+\delta))$ 属于 D_0. 因此, $t_0+\delta$ 属于 S, 这与 t_0 的定义矛盾. 于是, 必有 $t_0=1$, 正如所期望的. 因为 u 的最小值是 $-u$ 的最大值的负数, 所以我们也知道, 如果 u 在 D 取到它的最小值, 则 u 在整个 D 内是常数. □

注记 最大值最小值原理 (定理 1) 是强最大值最小值原理的一个直接推论. 的确, 沿用定理 1 中的符号, 如果最大值 (或最小值) 不在 D 的边界上取到, 则由定理 4, u 是常数, 由此, 在 $\overline{D}$ 中处处取到最大值 (或最小值), 得到矛盾. 再者, 由于上面中值定理 (在例 5 中运用过) 的另一种证明没有用到唯一性 (定理 2), 所以根据定理 4 证明定理 1, 并不是循环的. □

例 6 假设 u 是定义在水平带形 $-1 \leqslant y \leqslant 1$ 上的连续函数, 并假设 u 在 $-1 < y < 1$ 上是调和的. 假设对每个 $y \in [-1, 1]$, $u(x, y)$ 关于 x 是以 2 为周期的 (即, 对所有的 x, $u(x+2, y) = u(x, y)$). 如果 u 在边界直线 $y = \pm 1$ 上等于零, 则证明 u 在整个带形上等于零. 给出一个例子说明如果去掉周期性的假设, 结论不成立.

解 正方形 $-1 \leqslant x,\ y \leqslant 1$ 是闭的和有界的. 因此, 当限制在该正方形时, 连续函数 u 在正方形的某点取到它的最大值和最小值 (参看附录 4). 因为假设 u 关于 x 是以 2 为周期的, 所以 u 在该正方形 (沿 x 方向) 的任意平移的最大值和最小值与原正方形相同. 因此 u 在带形上的最大值和最小值可在无穷多点上取到. 如果这些点中的任一个点不在带形的边界直线上, 则 (由定理 4)u 在带形上是常数, 于是在带形上恒等于零 (为什么?). 如果最大值和最小值出现在边界直线上, 在其上 u 等于零, 则该函数在带形上显然为 0. 因此, 不管什么情形, $u \equiv 0$. 注意到调和函数 $u(x, y) = \cosh(\pi x/2)\cos(\pi y/2)$ 在边界 $y = \pm 1$ 上为零, 但对于 $-1 < y < 1$ 它是正的. 因此, 周期性假设不能去掉. 该例也说明带形上 Dirichlet 问题的唯一性不成立 (为什么?). □

注记 在例 6 中如果用适当的 "在无穷远处的连续性条件" 代替周期性条件, 则如下例所表明的,u 在整个带形 $-1 < y < 1$ 上必为零.

例 7 假设 u 在闭水平带形 $-1 \leqslant y \leqslant 1$ 上连续, 且 u 在 $-1 < y < 1$ 上调和. 假设 u 在边界直线 $y = \pm 1$ 上等于零. 如果

$$|u(x, y)| \leqslant \frac{1}{1+x^2}, \quad y \in [-1, 1],$$

则证明 u 在整个带形上为零.

解 对任意 $a > 0$, u 在矩形区域 $\{(x, y) : -a \leqslant x \leqslant a,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ 边界上的值位于 $\frac{-1}{1+a^2}$ 和 $\frac{1}{1+a^2}$ 之间. 因此, 由最大值最小值原理, u 在整个该矩形区域的值位于 $\frac{-1}{1+a^2}$ 和 $\frac{1}{1+a^2}$ 之间. 由于 a 可任意大, 所以在带形上 $u = 0$. □

概要 6.4

1. 最大值最小值原理 (定理 1): 设 $u=u(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上连续, 其中 D 是 xy 平面的非空有界开子集. 如果 u 在 D 上调和, 则 u 的最大值和最小值在 D 的边界达到.

2. Dirichlet 问题的唯一性 (定理 2): 对 xy 平面的任一非空有界开子集 D, 设 u_1 和 u_2 是 $\overline{D}$ 上的连续函数. 如果 u_1 和 u_2 在 D 的所有边界点上都相等, 则它们在整个 $\overline{D}$ 上相等. 换句话说, D 上 Dirichlet 问题至多只有一个解.

3. 解对边界数据的连续依赖性: 设 $u_i(i=1,2)$ 是以下 Dirichlet 问题的解 (如果解存在)

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad \triangle u_i = 0, \quad \text{于 } D\text{上};\\ &\text{B.C.} \quad u_i = f_i, \quad \text{于 } C\text{上}, \end{aligned}$$

其中 C 是有界开集 D 的边界. 如果 M 是 $|f_1-f_2|$ 在 C 上的最大值, 则对 $\overline{D}$ 中所有的 (x,y), $|u_1(x,y)-u_2(x,y)|\leqslant M$.

4. 强最大值最小值原理 (定理 4): 设 u 在连通开集 D 上调和. 假设 u 的最大值或最小值在 D 内某点取到. 则 u 在整个 D 上必为常数.

练习 6.4

1. 设 D 是 xy 平面中有界开集, 设 u_1,u_2 和 u_3 在 $\overline{D}$ 上连续且在 D 上调和. 证明如果在 D 的边界上 $u_1\leqslant u_2\leqslant u_3$, 则在整个 D 上 $u_1\leqslant u_2\leqslant u_3$.
2. 设 u 是 $\overline{D}$ 上的连续函数, 其中 D 是某个连通开集. 如果 u 在 D 上是调和的, 解释为什么一般说来通过同时解方程 $u_x=0$ 和 $u_y=0$ 来确定 u 取最大值的点是浪费时间.
3. 通过考虑乘积解来证明 Dirichlet 问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<\pi, \quad 0<y<\infty\\ &\text{B.C.} \quad u(x,0)=0, \quad u(0,y)=0, \quad u(\pi,y)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant\pi, \quad 0\leqslant y<\infty \end{aligned}$$

有不止一个解. 为什么这个结果不与定理 2 矛盾?

4. 注意到 $u_1(x,y) = 1 + \ln(x^2+y^2)$ 和 $u_2(x,y) = 1 - \ln(x^2+y^2)$ 在有定义的地方是调和的. 而且这些函数在圆周 $x^2+y^2=1$ 上相等, 但在该圆内不等. 为什么这个结果不与定理 2 矛盾?

5. 证明任一与一调和函数 (定义在开连通集 D 上) 的图像相切的平面必与该图像交于不止一个点.

提示 切平面也是一调和函数的图像. 考虑这些函数的差, 并运用强最大值原理.

6. 利用中值定理证明: 对任意满足 $|b|<1$ 的实常数 b, 有

$$\int_0^{2\pi} \ln[(1+b\cos\theta)^2 + (b\sin\theta)^2]d\theta = 0.$$

证明这个等式对 $b>2$ 不成立.

7. 设 $f(x)$ 是对所有实数 x 有定义的连续函数, 且对某个常数 M, 对所有的 x 有 $|f(x)| \leqslant M$.

(a) 通过考虑函数 $v(x,y)=y$ 来证明上半平面 $y \geqslant 0$ 上的 Dirichlet 问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_{xx}+u_{yy}=0, \quad -\infty<x<\infty, \quad y>0 \\ &\text{B.C.} \quad u(x,0)=f(x), \quad -\infty<x<\infty, \end{aligned}$$

解不唯一.

(b) 定义

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(s)}{(x-s)^2+y^2}ds,$$

证明 (至少是形式上证明)u 在 $y>0$ 上是调和的.(程度高的读者会顾意小心和反复地运用附录 3 中的 Leibniz 法则来正确地进行积分号下求导. 首先考虑 (x,y) 在区域 $-A<x<A,\ 0<\epsilon<y<\infty$ 中, 其中 A 和 ϵ 是正常数.)

(c) 对 x–轴上任意一点 $(x_0,0)$, 证明通过取 (x,y)($y>0$) 充分靠近 $(x_0,0)$, 可使 (b) 中的 $u(x,y)$ 任意接近 $f(x_0)$.

提示 先证明当 $f(s) \equiv K$ 时, K 为某个常数, (b) 中的积分恒等于 K. 通过取 K 等于 $f(x_0)$, 推断

$$u(x,y) - f(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y[f(s)-f(x_0)]}{(x-s)^2+y^2}ds.$$

把积分区间分成三块, 即 $(-\infty,\ x_0-\delta]$, $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$ 和 $[x_0+\delta,\ \infty)$, 然后, 像证明圆盘上的 Poisson 积分公式 (参看第 6.3 节的定理 1) 那样来估计所产生的三个积分的每个积分.

注记 (c) 部分建立了 (a) 中 Dirichlet 问题的解由 (b) 中的公式给出, 该公式称为**上半平面的Poisson积分公式**. □

8. 对 $r<1$ 和 $z=re^{i\theta}$, 令

$$U(r,\theta)=\mathrm{Im}\big[(\frac{1+z}{1-z})^2\big].$$

(a) 验证 $U(r,\theta)$ 对于 $r<1$ 是调和的.

(b) 证明对每个固定的 θ, $\lim_{r\to 1}U(r,\theta)=0$.

(c) 为什么不能应用定理 1 得出 $U(r,\theta)\equiv 0$?

提示 证明

$$u(x,y)=-4y\frac{y^2+(x^2-1)}{[y^2+(x-1)^2]^2}.$$

考虑当 (x,y) 在圆盘内沿直线 $y=x-1$ 趋于 $(1,0)$ 时 $u(x,y)$ 的极限.

9. 设 $q(x,y)$ 是在某个圆盘外恒等于零的 C^2 函数. 本题来证明下面的表示式 (*) 是 Poisson 方程 $u_{xx}+u_{yy}=q(x,y)$ 的解.

(a) 对平面上任意固定的点 (x,y), 令

$$u(x,y)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ln[(x-s)^2+(y-s)^2]q(s,t)dsdt. \qquad (*)$$

证明

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ln[\bar{s}^2+\bar{t}^2]q(x+\bar{s},y+\bar{t})d\bar{s}d\bar{t}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}q(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)\ln(r)rdrd\theta \qquad (**)\end{aligned}$$

并利用事实 $\lim_{r\to 0^+}r\ln r=0$(为什么?), 根据 Leibniz 法则推断 $u(x,y)$ 是 C^2 的, 且 u_{xx} 和 u_{yy} 可通过在积分 (**) 下求导计算.

(b) 令 $Q(x,y,r,\theta)=q(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)$. 证明, 对 $r>0$, 有 $Q_{xx}+Q_{yy}=r^{-1}(rQ_r)_r+r^{-2}Q_{\theta\theta}$. 利用这个事实由 (a) 得出 $u_{xx}+u_{yy}=q(x,y)$.

提示 当计算 $[(rQ_r)_r+r^{-1}Q_{\theta\theta}]\ln r$ 的积分时, 利用分部积分求 $(rQ_r)_r\ln r$ 关于 r 的积分, 利用微积分中的基本定理以及关于 θ 的周期性来计算 $r^{-1}Q_{\theta\theta}$ 关于 θ 的积分.

10. 设 D 是有界开集, C 为其边界, 假设每个具连续边界函数的 Laplace 方程的 Dirichlet 问题有解 (不必是唯一的). 令 $q(x,y)$ 是对所有 (x,y) 有定义的 C^2 函数, 且在某个包含 D 的圆盘之外等于零. 利用习题 9 证明 Poisson 方程 Dirichlet 问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=q(x,y),\quad \text{于 } D \text{ 上}\\&\text{B.C.}\quad u(x,y)=f(x,y),\quad \text{于 } C \text{ 上}\end{aligned}$$

有唯一解, 其中 f 是给定的在 D 的边界 C 上的连续函数. **提示** 参看第 6.1 节的例 3.

11. 设 D 是开集, 令 $a \in D$. 在 a 点**具有对数奇性的 D 的 Green 函数**是 $z = x + iy$ 的实值函数 $g(z;a)$, 使得

(i) $g(z;a)$ 在 $D - \{a\}$ 内是调和的,

(ii) $g(z;a) + \ln|z-a|$ 在以 a 为圆心的圆盘内是调和的,

和

(iii) 对 D 的每个边界点 w, 当 z 在 D 内趋于 w 时, $g(z;a)$ 的极限为 0 (即 $g(z;a)$ 以零值连续地延拓到 D 的边界).

(a) 证明如果一个有界开集 D 有 Green 函数 $g(z;a)$, 则 $g(z;a)$ 是唯一的.

(b) D 和 $g(z;a)$ 如同 (a) 部分, 且 D 是连通的, 证明 $g(z;a)$ 在 D 上是正的.

提示 (a) 考虑 $h(z;a)$ 满足 (i)—(iii), 然后对 $h(z;a) - g(z;a)$ 应用最大值最小值原理. 为什么这个差没有奇性?

(b) 注意到 $\lim_{z\to a} g(z;a) = +\infty$, 然后在 D 去掉一个圆心在 $z = a$ 的任意小的圆盘上, 对 $g(z;a)$ 应用强最大值原理.

12. 设 D 和 C 如同习题 10, 假设 D 有如习题 11 的 Green 函数 $g(z;a)$. 对 $z = x + iy$ 和 $a = s + it$, 令 $G(x,y;s,t) \equiv g(z;a)$. 假设 G_{xx} 和 G_{yy} 连续地延拓到 $\bar{D} \times \bar{D}$, 使得当必要时 Leibniz 法则可施用. 证明习题 10 中在 C 上 $f(x,y) = 0$ 的 Dirichlet 问题的解为

$$u(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int\int_D G(x,y;s,t)q(s,t)dsdt, \quad (x,y) \in D.$$

为了验证当 (x,y) 从 D 内趋于 C 上的点时 $u(x,y)$ 趋于 0, 普通的读者可形式地在积分号下取极限. 程度较高的读者可尝试证明这个过程的正确性.

提示 为了证明 $u(x,y)$ 满足 Poisson 方程, 把 $-G(x,y;s,t)$ 写成 $\ln|z-a| - (g(z;a) + \ln|z-a|)$, 把积分分解成两个积分的和, 然后应用习题 9 的结果. 注意到 $\ln|z-a|q(s,t)$ 关于 $dsdt$ 在 D 的外部上的积分是调和的 (为什么?).

13. (a) 验证圆盘 $r < 1$ 上的 Green 函数是

$$g(z;a) = \ln\left|\frac{\bar{a}z - 1}{z - a}\right|, \quad |a| < 1, \quad z = x + iy = re^{i\theta}.$$

(b) 利用 (a) 部分以及习题 11 和 12 来获得, 当 D 是圆盘 $r < 1$ 且边界函数 f 恒等于 0 时, Poisson 方程 Dirichlet 问题 (在习题 10 中) 解的显式积分公式. 如果连续边界函数 f 是任意的, 能做什么?

14. (a) 由直接计算验证单位圆盘的 Poisson 核 $P(r,1,\theta - t)$ 由以下给出

$$P(r,1,\theta-t) = -\frac{\partial}{\partial R}(G(r,\theta;R,t))|_{R=1},$$

其中 $G(r,\theta;R,t) = g(re^{i\theta};Re^{it})$ 是习题 13 单位圆盘上的 Green 函数.

(b) 利用下面单位圆盘上的 Green 公式, 形式推导 (a) 的结果

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1(\triangle V(R,t)U(R,t)-V(R,t)\triangle U(R,t))RdRdt$$
$$=\int_0^{2\pi}(V_R(1,t)U(1,t)-V(1,t)U_R(1,t))dt. \qquad (***)$$

(该公式的推导与引理 1 的证明类似. 只涉及到两个简单的分部积分, 不需要向量分析中一般的 Green 公式.)

提示 令 $U(r,\theta)$ 是 $r<1$ 的调和函数且对 $r\leqslant 1$ 是连续的, 对固定的 (r,θ), 令 $V(R,t)=G(r,\theta;R,t)$. 注意到

$$U(r,\theta)=\triangle\Big(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 G(r,\theta;R,t)U(R,t)RdRdt\Big),$$

其中 $G(r,\theta;R,t)$ 是习题 13 的 $g(z;a)$(为什么?). 现形式地把 $\triangle$ 取在积分下然后应用 $(***)$, 由假设, 注意到 $\triangle U(R,t)=0$. 最后, 得

$$U(r,\theta)=-\int_0^{2\pi}G_R(r,\theta;1,t)U(1,t)dt,$$

其中由 Poisson 核的唯一性 (参看例 4), $-G_R(r,\theta;1,t)=P(r,1,\theta-t)$.

§6.5 复变量理论及其应用

我们已经看到 $(x+iy)^n$, $n=0,1,2,\cdots$ 的实部和虚部是调和的 (参看第 6.1 节的习题 5(*d*), 或利用第 6.3 节中的 De Moivre 公式). 容易验证 $e^{x+iy}=e^x\cos y+ie^x\sin y$ 的实部和虚部也是调和的. 更一般地, 假设有一个复变量 $z=x+iy$ 的函数 $f(z)$. 正如我们稍后将看到的, 确保 $f(z)$ 的实部和虚部在开集 D 上是调和的一个关键性质是: 对 D 中的每点 $z=x+iy$ (即 $(x,y)\in D$), 在如下极限存在的意义下 $f(z)$ **关于** z **是可导的**

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}, \qquad (1)$$

不论复数 h 是怎样趋于 0. 例如, z^2 的导数等于 $2z$, 因为

$$\lim_{h\to 0}\frac{(z+h)^2-z^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2hz+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2z+h)=2z.$$

一个函数 $f(z)$ 称为在开集 D 上是**复解析的**(或简单地称为**解析的**或**全纯的**), 如果对 D 中所有的点 z, $f'(z)$ 存在. 如果 $f(z)$ 在整个复平面上是解析的, 则称 $f(z)$ 是**整函数**. 整函数的例子包括多项式 $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, 其中系数 a_i 是常数 (可以是复数), 以及 e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$, 这些函数能用 z 的幂级数来定义. 函数 z^{-1} 不是整函数, 因为它的导数 $-z^{-2}$ 在 $z = 0$ 处不存在, 但它在挖去一点的平面 $\{z: z \neq 0\}$ 上是全纯的. 下面的命题揭示了解析函数和调和函数之间的关系.

命题 1 (Cauchy-Riemann 方程) 如果

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

在开集 D 上是解析的, 则 f 的实部和虚部 (分别为 u 和 v) 在 D 内服从 Cauchy-Riemann 方程:

$$u_x = v_y \quad 和 \quad u_y = -v_x. \tag{2}$$

除此之外, 如果还有 u 和 v 在 D 上是 C^2 的, 则它们在 D 上是调和的, 且

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

证明 如果在 (1) 中取 h 为实数, 则得 (对 D 中的 z)

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h, y) + iv(x + h, y) - [u(x, y) + iv(x, y)]}{h} = u_x + iv_x. \tag{2'}$$

如果取 h 为复数 ik, 其中 k 是实数, 则

$$f'(z) = \lim_{k \to 0} \frac{u(x, y + k) + iv(x, y + k) - [u(x, y) + iv(x, y)]}{ik} = v_y - iu_y.$$

在这两个关于 $f'(z)$ 的表示式中对应的实部和虚部相等, 得到 Cauchy-Riemann 方程. 如果 u 和 v 是 C^2 的, 则利用 Cauchy-Riemann 方程, 得 $u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$ 和 $v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0$, 于是, u 和 v 在 D 上是调和的. □

注记 已经证明一个解析函数的实部和虚部是 C^∞ 的. 因此, u 和 v 是 C^2 的假设实际上是不必要的, 但上述的证明需要这个假设. 反过来, 如果 u 和 v 是 C^1 函数且满足 Cauchy-Riemann 方程, 则可证明 $f(z) = u + iv$ 是解析的 (参看 Rudin, 1987). □

如果 $u+iv$ 是解析的, 则称调和函数 v 是调和函数 u 的**调和共轭**. 例如, 由于 $z^2=x^2-y^2+i2xy$ 是解析的, 函数 $2xy$ 是 x^2-y^2 的调和共轭. 由于根据 Cauchy-Riemann 方程, v 的偏导数由 u 确定, 所以如果 u 有两个调和共轭, 则它们必相差一个常数. 如果 u 在一个开矩形集合 R 上调和, 则存在函数 v, 使得 $u+iv$ 在 R 内是解析的 (即, u 在 R 内有调和共轭 v). 该事实是下述命题的一个结论, 后面有关流体流问题我们也将用到该命题. 于是, 在 R 上的任一调和函数 u 是某个解析函数 $u+iv$ 的实部. 由于 $-v+iu=i(u+iv)$ 也是解析的, 所以可知 u 也是 R 上某个解析函数的虚部. 注意到, 如果 v 是 u 的调和共轭, 则 $-u$(负 u) 是 v 的调和共轭, 因为 $v-iu=-i(u+iv)$ 是解析的. 因此, 严格说来不应该像通常所说的那样 (事实上, 几乎总是这样说), 把 u 和 v 称为是互为调和共轭的.

命题 2 设 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 是在开矩形集合 R(可能有一边或多边具无穷长度, 使得 R 可以是带形) 上的 C^1 函数. 则在 R 上存在 C^2 函数 $f(x,y)$, 使得

$$f_x(x,y)=P(x,y) \quad 和 \quad f_y(x,y)=Q(x,y), \tag{3}$$

成立的充要条件是: 在 R 上可积性条件 $P_y=Q_x$ 成立.

证明 如果 f 满足 (3), 则 $P_y=f_{xy}=f_{yx}=Q_x$. 反过来, 假设在 R 上 $P_y=Q_x$, 构造满足 (3) 的 f 如下. 令 (a,b) 是 R 中的点, 设 H 是 R 上任一满足 $H_x=P$ 的 C^2 函数 (例如, $H(x,y)=\int_a^x P(s,y)ds$). 类似地, 设 $K(x,y)$ 是 R 上的 C^2 函数, 使得在 R 上 $K_y=Q$. 则置 $u(x,y)=H(x,y)-K(x,y)$ 并注意到 $u_{xy}=H_{xy}-K_{yx}=P_y-Q_x=0$. 因此, u 满足偏微 $u_{xy}=0$, 该偏微在 R 上具有形式 $u(x,y)=k(x)-h(y)$ 的通解, 其中 h 和 k 是 C^2 函数 (参看第 1.3 节). 于是, $H(x,y)-K(x,y)=u(x,y)=k(x)-h(y)$. 由下式定义 f

$$f(x,y)=H(x,y)+h(y) \qquad 或 \qquad f(x,y)=K(x,y)+k(x).$$

由于两个右端相等, 所以用哪个式子没关系. 由第一个式子, 得 $f_x=H_x=P$, 由第二个式子, 得 $f_y=K_y=Q$. □

命题 3 定义在开矩形区域 R 上的任一调和函数 u, 有定义在 R 上的调和共轭 v.

证明 根据命题 2 前的注记, 我们只需证明对给定的调和函数 u, 能求解 Cauchy-Riemann 方程 $v_x = -u_y$ 和 $v_y = u_x$. 对 $P = -u_y$ 和 $Q = u_x$ 应用命题 2. 由于 u 是调和的, 所以有可积性条件 $P_y = -u_{yy} = u_{xx} = Q_x$, 于是 v 存在. □

注记 我们一般定义一个**区域**是平面的非空开子集或者含有它的某些边界点, 或者不含它的边界点或者含有它的所有边界点. 可以证明, 如果用一个没有 "洞" 的开区域(即, 外部是连通的任一开区域)代替矩形, 命题 2 和命题 3 仍然为真. 平面中的这种区域称为是**单连通的**. 下面的例 3 表明这个假设是必要的. □

例 1 求定义在整个平面上的调和函数

$$u(x,y) = \sin x \cosh y + y$$

的调和共轭.

解 如在命题 2 的证明的做法, 对方程 $v_y = u_x = \cos x \cosh y$ 关于 y 积分, 对 $v_x = -u_y = -\sin x \sinh y - 1$ 关于 x 积分. 则 $v(x,y) = \cos x \sinh y + h(x)$ 和 $v(x,y) = \cos x \sinh y - x + k(y)$, 其中 h 和 k 是任意 C^1 函数. 比较这两个 $v(x,y)$ 的表示式, 得 $h(x) = -x + c$ 和 $k(y) = c$, 其中 c 是任意实数. 因此, $v(x,y) = \cos x \sinh y - x + c$ 是 u 的调和共轭. 相应的调和函数是

$$f(z) = u + iv = [\sin x \cosh y + y] + i[\cos x \sinh y - x + c],$$

这其实是 $\sin z - iz + ic$(参看习题 1). □

例 2 证明如果 v 是调和函数 u 的调和共轭, 则在任意点, 梯度 ∇u 和 ∇v 是等长的且是正交的. 推断在 $\nabla u \neq 0$ 的点, u 和 v 的水平曲线是正交的.

解 对解析函数 $f = u + iv$ 应用 Cauchy-Riemann 方程, 有 $|\nabla u|^2 = (u_x)^2 + (u_y)^2 = (v_y)^2 + (-v_x)^2 = |\nabla v|^2$, 由此, u 和 v 的梯度具有相同的长度. 还注意到 $f'(z) = u_x + iv_x$(参看 $(2')$) 的长度 $|f('z)|$ 与这些梯度有同样的长度. 这两个梯度的点积是 $u_x v_x + u_y v_y = v_y v_x - v_x v_y = 0$. 因此, 这些梯度是正交的. 回忆起函数在一点的梯度与过这点的水平曲线正交, 如果该梯度是非零的话. 因此, u 和 v 过点 z 的水平曲线是正交的, 其中 $f'(z) \neq 0$, 因为 u 和 v 的梯度是正交的. □

例 3 证明在挖去一点的平面 $(r > 0)$ 上调和的函数 $u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$ 或 $U(r,\theta) = \ln r$ 没有定义在该挖去一点的平面上的调和共轭. 然而, 如果从该挖去一点的平面上剔除负 x–轴, 则在该撕开的平面 (它是单连通的; 参看命题 3

后面的注记) 上存在唯一的 u 的调和共轭 v, 使得 v 在正 x–轴上等于零. 证明在该撕开的平面上, 解析函数 $f=u+iv$ 是指数函数 e^z 的反函数 (即, $f(z)$ 可视为对数函数).

解 由于 $u=\ln r$ 的水平曲线是圆心在极点的圆周, 所以由例 3 得知 u 的调和共轭 v 的水平曲线必是从原点发出的射线.(注意到 u 的梯度不为零, 因此所有水平曲线确实是曲线, 且 v 不会是常数.) 反过来, $V(r,\theta)$ 必具有形式 $h(\theta)$. 然而, 这种形式的唯一的调和函数是函数 $V(r,\theta)=a\theta+b$(参看第 6.3 节的习题 2). 由于 v 不是常数, 所以有 $a\neq 0$. 因此, $V(r,\theta+2\pi)\neq V(r,\theta)$, 于是 v 在整个挖去一点的平面上不可能是连续的. 在撕开的平面上假设 v 在正 x–轴 (即, 当 $\theta=0$ 时) 上是 0, 得 $b=0$ 和 $V(r,\theta)=a\theta$. 由于 $u_x(1,0)=1$ 和 $v_y(1,0)=a$, 所以由 Cauchy-Riemann 方程 $u_x=v_y$, 必有 $a=1$. 因此, $V(r,\theta)=\theta,\ -\pi<\theta<\pi$, 且

$$f(z)=f(re^{i\theta})=\ln r+i\theta,\quad r>0,\quad -\pi<\theta<\pi.$$

注意到 $\exp[f(z)]=\exp[\ln r+i\theta]=\exp[\ln r](\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}=z$, 因此 f 是 exp 在该撕开平面上唯一的逆, 它在正 x–轴上是实数. 如果对 $f(z)$ 加上 $2\pi i$ 的整数倍, 得到 exp 的其他逆, 这些逆在正 x–轴上不是实数. 由于这个缘故, $f(z)$ 称为**多值对数函数的主支**, 且 $f(z)$ 记作 $\ln z$. □

共形映照

复变量 z 的复值函数 $f(z)$ 把 $f(z)$ 的定义域内的每一复数 $z=x+iy$ 赋予一个新复数 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. 换言之, f 把 z–平面 (或 xy–平面) 上的点投射 (或映照) 到 w–平面 (或 uv–平面) 上的点. z–平面中的一个区域可由 $f(z)$ 映射成 w–平面中的不同形状的区域. 就如我们即将要证明的, 如果 $f(z)$ 是解析的, 在 z–平面的一个圆盘遭受的变形程度 (当它经 $f(z)$ 映照到 w–平面) 随着圆盘变小而减少, 只要 $f'(z)$ 在圆心 z_0 不为零. 虽然圆心在 z_0 的小圆盘的圆形形状几乎是保留的, 但映像将放大大约 $|f'(z_0)|$ 因子. 由于这个缘故, 由一解析函数确定的映照, 当 $f'(z)$ 不为零时, 称为是**共形映照**(即, 局部保持形状, 但不必保持大小). 我们暂且说到这里, 通过下面的例子来说明前述的思想.

例 4 证明解析函数 $f(z)=z^2$ 把楔形 $0\leqslant r\leqslant 3,\ 0\leqslant\theta\leqslant\alpha$ 映成楔形 $0\leqslant r\leqslant 9,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\alpha$.

解 函数 $f(z)=z^2$ 把点 (x,y) 映成 $(x^2-y^2,2xy)$, 而利用极坐标, 几何上很容易看出这个映照. 的确, 由 De Moivre 公式, 有 $f(re^{i\theta})=r^2e^{i2\theta}$, 这表明, 极坐

标为 (r,θ) 的点映成极坐标为 $(r^2,2\theta)$ 的点 (即, 极角加倍且到极点的距离平方). 特别, 扇形 $0\leqslant\theta\leqslant\alpha$ 内的任一点映入扇形 $0\leqslant\theta\leqslant 2\alpha$, 边界弧 $r=3$, $0\leqslant\theta\leqslant\alpha$ 上的点映到弧 $r=9$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\alpha$ (参看图 1). □

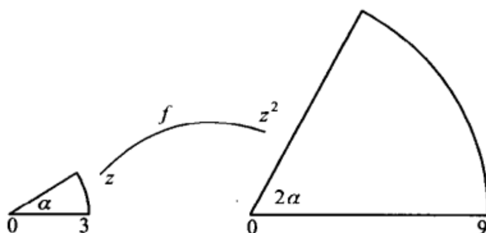


图 1

例 5 假设 $f(z)$ 是解析函数, 且 $f'(z_0)=Me^{i\tau}\neq 0$. 当 θ 变化时, 点 $z_0+re^{i\theta}$ $(r>0)$ 绘出半径为 τ 圆心为 z_0 的圆周 C. 证明对小的 r, 圆周 C 几乎被 f 映成半径为 $M=|f'(z_0)|r$ 圆心为 $f(z_0)$ 的圆周, 且 C 旋转了 τ 弧度.

解 由 $f'(z)$ 的定义 (1), 得知对小的 $|h|$, $f(z_0+h)-f(z_0)\approx f'(z_0)h$. 对小的 r, 取 $h=re^{i\theta}$, 则得

$$f(z_0+re^{i\theta})\approx f(z_0)+(Me^{i\tau})re^{i\theta}=f(z_0)+Mre^{i(\theta+\tau)}.$$

因此, 随着 θ 的变化, 可看出圆周 C 几乎被映成圆心在 $f(z_0)$ 半径为 Mr 的圆周, 且该圆周旋转了 τ 弧度的角度, 因为对应于 θ 的 C 上的点几乎被映成映像曲线上具角度 $\theta+\tau$ 的点. 注意到 C 的一弧段的中心角经该映照几乎是保持的, 这表明共形映照保角. $f'(z)$ 存在的事实在证明中是关键的. 例如, 函数 $g(x+iy)=2x+iy$ 不是解析的. 的确, $g'(z)$ 不存在, 因为 Cauchy-Riemann 方程 $u_x=v_y$ 不成立. g 不是把小圆周几乎映成小圆周, 而是把圆周映成宽是高的两倍的椭圆. 还有, 需要知道 $f'(z_0)\neq 0$. 例如在例 4 中, 其中 $f(z)=z^2$ 和 $f'(0)=0,z_0=0$ 的角度没有保持, 而是加倍了. □

解析函数 $f(z)$ 或共形映照的关键性质之一是, 它们能在下述命题 4 的意义下, 把 w–平面中的区域 E 上的调和函数变换成 E 在 z–平面的原像 D 上的调和函数, 这种性质使得解析函数很有用. 特别, 如果能解出在熟悉的区域 E(比如圆盘或矩形) 上的 Dirichlet 问题, 就能利用 f 来解不熟悉区域 D 上的 Dirichlet 问题, 只要如此选取 f, 使得它把 D 共形地映到 E 上. 然而, 求这样的 f 的显

式表达式是困难的, 即使有共形映照的表或书.

> **命题 4** 如果 $h(u,v)$ 是 uv–平面 (即 w–平面, $w=u+iv$) 中开集 E 上的调和函数, 如果 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是 xy–平面中开集 D 上的解析函数, 它把 D 映入 E, 则 $g(x,y)\equiv h(u(x,y),v(x,y))$ 定义了 D 上的调和函数 $g(x,y)$.

证明 利用链法则, $g_x = h_u u_x + h_v v_x$ 和 $g_{xx} = h_{uu}(u_x)^2 + 2h_{uv}u_x v_x + h_{vv}(v_x)^2$, 对 g_{yy} 有类似的表示式. 因此, 利用例 2 的解答, 得

$$g_{xx}+g_{yy}=|\nabla u|^2 h_{uu}+2\nabla u\cdot\nabla v h_{uv}+|\nabla v|^2 h_{vv}=|f'(z)|^2(h_{uu}+h_{vv}).$$

于是, 如果 h 在 E 上是调和的, 则 g 在 D 上是调和的. □

接下来两个例子说明, 这种方法怎样通过把一个区域共形映照成一个更熟悉的区域 (参看命题 4 前的段落), 来求解该区域上 Laplace 方程的边值问题.

例 6 考虑一块导热板 D, 它是第一象限去掉四分之一圆盘 $r<1,\ 0<\theta<\pi/2$, 如图 2 所示. 假设圆弧是绝热的, 边 $y=0\ (x>1)$ 保持温度 0, 而剩下的边 $x=0\ (y>1)$ 保持温度 100. 通过由解析函数 $f(z)=\ln z=\ln r+i\theta=u+iv=w$(参看例 3) 把 D 共形映照成带形来求该板内稳态温度.

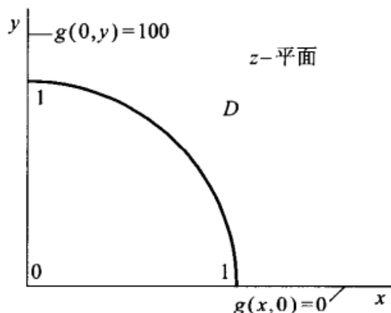


图 2

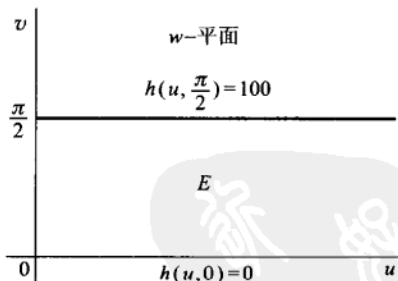


图 3

解 区域 D 由 $r>1$ 和 $0<\theta<\pi/2$ 定义. 由于 $u=\ln r$ 和 $v=\theta$, 所以在共形映照 f 下, D 的映像, 记作 E, 由 $u>0$ 和 $0<v<\pi/2$ 定义, 这是 uv–平面 (或 w–平面) 中的一个带形 (参看图 3). 在 E 上对应的边界条件也在图 3 中标出.

经检验可见 $h(u,v)=200v/\pi$ 是在 E 上满足问题的调和函数. 因此, 用极坐标表示, 原问题的解是 $G(r,\theta)=h(U(r,\theta),V(r,\theta))=h(\ln r,\theta)=200\theta/\pi$, 或用 x 和 y 表示, 有

$$g(x,y)=h(u(x,y),v(x,y))=h\Big(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2),\tan^{-1}\frac{y}{x}\Big)=\frac{200}{\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x}. \quad \square$$

例 7 令 R 是正常数, 定义 $F(z)=R^2z^{-1}$, $z\neq 0$. 证明 F 把圆周 $r=R$ 的外部 $r>R$ 映到该圆周的内部去掉极点 (即, 映到挖去一点的圆盘 $0<r<R$). 利用 F 解以下**外部 Dirichlet 问题**

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad x^2+y^2>R^2\\&\text{B.C.}\quad U(R,\theta)=f(\theta),^{①}\end{aligned}\tag{4}$$

其中 $f(\theta)$ 是以 2π 为周期的连续周期函数.

解 用极坐标, $F(re^{i\theta})=R^2(re^{i\theta})^{-1}=R^2r^{-1}e^{-i\theta}$. 换言之, F 把点 (r,θ) 映成 $(R^2/r,-\theta)$. 如果 $r\geqslant R$, 则 $R^2/r\leqslant R$. 因此, F 把圆周 $r=R$ 的外部映到该圆周的内部. 还注意到圆周上的点 (R,θ) 映成 $(R,-\theta)$. 现由关于边界函数 $f(-\theta)$ 的 Poisson 积分公式, 得 $r<R$ 的 Dirichlet 问题的一个解 $H(r,\theta)[=h(re^{i\theta})]$, 即

$$H(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(r,R,\theta-t)f(-t)dt.$$

然后利用共形映照 F 得到所给问题 (4) 的一个解 $g(re^{i\theta})\equiv h(F(re^{i\theta}))=h(R^2r^{-1}e^{-i\theta})=H(R^2/r,-\theta)$, 即

$$\begin{aligned}G(r,\theta)&=H\Big(\frac{R^2}{r},-\theta\Big)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P\Big(\frac{R^2}{r},R,-\theta-t\Big)f(-t)dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P\Big(\frac{R^2}{r},R,t-\theta\Big)f(t)dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(R^2-\frac{R^4}{r^2})f(t)}{\frac{R^4}{r^2}-2\frac{R^2}{r}\cos(\theta-t)+R^2}dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(r^2-R^2)f(t)}{R^2-2Rr\cos(\theta-t)+r^2}dt.\end{aligned}\tag{5}$$

注意到问题 (4) 有许多其他的解, 因为总可以添加调和函数 $[(r/R)^n-(R/r)^n]\sin(n\theta)$ (或用 $\cos(n\theta)$), $n=1,2,\cdots$ 的线性组合, 这些线性组合在圆

①原文误为 $U(r,\theta)=f(\theta)$.——译者

周 $r = R$ 上为零. 这与唯一性定理 (第 6.4 节的定理 2) 不矛盾, 因为圆周的外部区域不是有界开集. 可以证明 (5) 是唯一的以下述意义下有界的解, 存在常数 M, 使得对所有 (r,θ), $r \geqslant 1$, $|G(r,\theta)| \leqslant M$(参看习题 6). □

流体流, 静电学和热理论中的共形映照

假设流体流在时刻 t 位于点 (x,y,z) 的速度具有形式 $\mathbf{v} = v_1(x,y)\mathbf{i}+v_2(x,y)\mathbf{j}$ (即, 假设速度实际上与 z 和 t 无关). 这样的速度向量场称为用来描述**稳态二维流体流**. 自此我们假设 v_1 和 v_2 是 C^1 的. 如果流体是 "不可压缩的", 则流体流出任一矩形 $(a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d)$ 的净流量必为 0. 则

$$\begin{aligned}0 &= \int_c^d v_1(b,y)dy - \int_c^d v_1(a,y)dy + \int_a^b v_2(x,d)dx - \int_a^b v_2(x,c)dx \\ &= \int_c^d \int_a^b (v_1)_x dxdy + \int_a^b \int_c^d (v_2)_y dydx = \int_c^d \int_a^b [(v_1)_x + (v_2)_y]dxdy,\end{aligned}$$

其中我们已经用了微积分的基本定理. 由于矩形是任意的, 故有 $(v_1)_x + (v_2)_y = 0$. 如果这个方程对所有的速度场 $\mathbf{v}$ 成立, 则该流体称为是**不可压缩的**. 数量 $(v_1)_x + (v_2)_y$ 称为是向量场 $\mathbf{v}$ 的**散度**. 因此, 流体是不可压缩的当且仅当它的速度场是散度自由的.

如果一条鱼沿上述矩形的边界以反时针游动整个一圈, 鱼从流场中获得的净借助的量为

$$\begin{aligned}&\int_a^b v_1(x,c)dx + \int_c^d v_2(b,y)dy - \int_a^b v_1(x,d)dx - \int_c^d v_2(a,y)dy \\ &\qquad = \int_c^d \int_a^b [(v_2)_x - (v_1)_y]dxdy.\end{aligned}$$

这个量称为流体流围绕矩形回路的**环流量**. 如果围绕任意矩形回路的环流量是

0, 则该计算表明必有 $(v_2)_x - (v_1)_y = 0$. 这时称流体流是**无旋的**.

命题 5 设 $\mathbf{v}(x, y) = v_1(x, y)\mathbf{i} + v_2(x, y)\mathbf{j}$ 是一不可压缩流体的无旋流体流的 C^1 速度向量场. 假设 $\mathbf{v}(x, y)$ 是定义在单连通 (参看命题 3 后面的注记) 开区域 R 上. 则在 R 上存在 C^2 函数 $\Phi(x, y)$ 和 $\Omega(x, y)$, 使得

$$\Phi_x = v_1 \quad 和 \quad \Phi_y = v_2, \tag{6}$$

和

$$\Omega_x = -v_2 \qquad 和 \qquad \Omega_y = v_1. \tag{7}$$

证明 由命题 2 以及命题 3 后的注记,Φ 和 Ω 存在. 关于 (6) 的可积性条件是无旋条件 $(v_2)_x - (v_1)_y = 0$, 而关于 (7) 的可积性条件是不可压缩条件 $(v_1)_x - (-(v_2)_y) = 0$. □

函数 Φ 称为流体流的**速度位势**, 因为 $\nabla\Phi = \mathbf{v}$. 函数 Ω 称为**流线函数**, 因为水平曲线 $\Omega =$ 常数 是流线.(易见 Ω 的梯度与 $\mathbf{v}$ 正交, 所以 $\mathbf{v}$ 必与 Ω 的水平曲线相切.) 注意到 (6) 和 (7) 意味着 Φ 和 Ω 满足 Cauchy-Riemann 方程, 即 $\Phi_x = \Omega_y$ 和 $\Phi_y = -\Omega_x$. 于是, 有解析函数

$$f(z) = f(x + iy) = \Phi(x, y) + i\Omega(x, y), \tag{8}$$

此称为流体流的**复速度位势**. 由命题 1,

$$f'(z) = \Phi_x + i\Omega_x = v_1 - iv_2, \tag{9}$$

因此

$$|f'(z)| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \tag{10}$$

换言之, $f'(z)$ 的共轭是在点 (x, y) 或 $x + iy$ 的速度向量场 (看作复数), $f'(z)$ 的长度是流体流在该点的速度. 反过来, 任给一解析函数 $f(z)$, 由 (9) 定义的函数 v_1 和 v_2 将是一不可压缩流体的无旋流的速度向量场的分量. 的确, 由 Cauchy-Riemann 方程, Φ 和 Ω 是方程组 (6) 和 (7) 的解, 由此根据命题 2, 不可压缩性和无旋性相容性条件必满足.

在下面的例子中，我们验证一些解析函数以及由 (9) 定义产生的流体流. 由于 Ω 是调和的 (由命题 1), 所以也可以把 Ω 看作一个不带电荷的区域内的静电位势, 在这种情形, 曲线 $\Omega=$ 常数 是等位势曲线. 则曲线 $\Omega=$ 常数 是带电荷粒子移动的势力线, 因为电场与 $\nabla\Omega$ 成比例, 且 $\nabla\Omega$ 与曲线 $\Phi=$ 常数 相切.(从例 2 中回忆到, 由于 Ω 是 Φ 的一个调和共轭, 所以当 $f'(z)\neq 0$ 时 Φ 的水平曲线和 Ω 是正交的.) 如果把 Ω 看作一个稳态温度分布, 则 Ω 的水平曲线是常数温度曲线 (即**等温线**), 温度梯度 $\nabla\Omega$ 与 Φ 的水平曲线相切, 它可看作热流曲线. 因此, 我们看到任意一个解析函数同时提供了至少三个不同背景的多个问题的解.

例 8 令 $f(z)=z^2$. 画出 f 的实部和虚部水平曲线的草图并对这些曲线给出某些物理解释.

解 因 $f(z)=(x^2-y^2)+i2xy$, 所以 $\Phi(x,y)=\mathrm{Re}(f(z))=x^2-y^2$ 和 $\Omega(x,y)=\mathrm{Im}f(z)=2xy$. 在流体力学中, 与 f 相应的流体流的流线 (参看图 4) 是双曲线 $2xy=$ 常数.(即, 流线函数 Ω 的水平曲线). 在点 (x,y) 处的流体速度是速度位势 Φ 的梯度, 即 $\mathbf{v}(x,y)=2x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}$, 且流体的速度为 $2r$, 其中 r 是到原点的距离. 注意到流线 $2xy=0$ 由相交的曲线 (即, 坐标轴) 组成. 在交点该流线不再是 “正则” 曲线. 一般, 在这样的点, 流体流的速度必为 0 (或 $f'(z)=0$). 的确, 隐函数定理确保水平曲线 $\Omega=$ 常数 在 $\nabla\Omega\neq 0$ 的点处是正则的. 利用例 2, 在流线的 “非正则” 点 z, 则必有 $0=|\nabla\Omega|=|f'(z)|$. 速度为零的点称为**滞点**. 于是知道流线上非正则点必是滞点. 我们可以以两股河流当它们分别从 x–轴的上方和下方向 x–轴迎面会拢的结果来解释该图. 把注意力局限在第一象限 $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$,

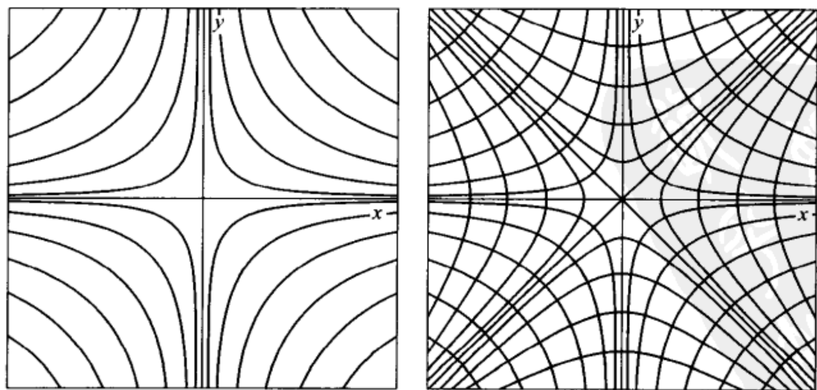


图 4

我们也可把该流看作是流体流线在平稳下来成为稳态流之后, 遇到壁角时流线变更的结果. 把图延拓到书页之外并把注意力局限在原点的一个小的邻域内, 流线也可看作一个静电位势的等位势曲面, 该静电位势由两条远隔的在 (a,a) 和 $(-a,-a)$ 与书页垂直的带正电荷的直线以及在 $(a,-a)$ 和 $(-a,a)$ 的两条带负电荷的直线产生, 这里 a 是大数. 用静电学的术语, 该位势是由在无穷远处的正方电极产生的. 如果我们把带正电荷的直线看作热源, 把带负电荷的直线看作散热系统, 等位势曲面是等温面. □

例 9 对 $r>0$ 和 $-\pi<\theta<\pi$, 令 $f(z)=\mathrm{Ln}z=\mathrm{Ln}(re^{i\theta})=\ln r+i\theta$(即 f 是 $\ln z$ 的主支, 参看例 3). 如在例 8 中所做的, 分析和解释该函数. 另外, 考虑相关的函数 $i\mathrm{Ln}z=-\theta+i\ln r$.

解 这时对应于 $f(z)$ 的流体流的流线是射线 $\theta=$ 常数(参看图 5). 速度位势 $\ln r$ 的梯度为 $r^{-1}\mathbf{e}_r$, 其中 $\mathbf{e}_r$ 是单位径向向量场. 因此, 该流体是由在极点的源发出的, 且随着远离极点而慢下来. 我们可把流线函数 θ 看作当两张平行的带相反电荷的半平面 ($x\leqslant 0$, $y=\pm\epsilon$, 延伸到书页外) 沿着负 x–轴 (参看图 5) 靠拢时 (即, 当 $\epsilon\to 0$ 时) 产生的静电位势. 如果把这两张半平面温度保持在 $-\pi$ 和 π 的热物体和冷物体, 则射线 $\theta=$ 常数 是由此产生的稳态温度分布的等温线. 现在来考虑相关的函数 $i\mathrm{Ln}z=-\theta+i\ln r$. 这时流线是圆周 $\ln r=$ 常数, 而速度是 $-\theta$ 的梯度, 等于 $-r^{-1}\mathbf{e}_\theta$, 因此流体流是顺时针的, 且随着 r 的增加速度减少. 静电位势 $\ln r$ 是一与书页垂直的, 无限长的均匀带电的金属丝的位势(参看第 6.1 节的例 1). 如果把该金属丝看作很冷的物体, 则 $\ln r$ 可认为是以圆周为等温线的稳态温度分布. 显然, 在无穷远处有个热源. □

例 10 如在例 8 和例 9 中相同的方式, 给出函数 $f(z)=V_0(z+R^2z^{-1})$ 的解释, 其中 V_0 和 R 是正常数且 $z\neq 0$.

解 对大的 $|z|$, 有 $f(z)\approx V_0z=V_0(x+iy)$. 因此, 相应的流体流的速度在远离极点处几乎等于 $V_0\mathbf{i}$. 用极坐标表示, 有

$$f(z)=f(re^{i\theta})=V_0\big(re^{i\theta}+\frac{R^2}{r}e^{-i\theta}\big)=V_0\big(r+\frac{R^2}{r}\big)\cos\theta+iV_0\big(r-\frac{R^2}{r}\big)\sin\theta. \quad (11)$$

注意到流线函数 $V_0(r-R^2/r)\sin\theta$ 在圆周 $r=R$ 上等于 0, 而且在 x–轴 (除了 $x=0$) 上也等于 0. 注意到该流线在 $z=\pm R$ 处是自相交的. 由例 8 的讨论, 我们推断这些自相交的点是滞点, 在其上流体速度必为零. 做一些工作, 读者可在圆周的外面草画出足够多其他的流线来推断函数 $f(z)$ 代表围绕圆形 (或圆柱体) 障碍物的稳流体流 (参看图 6) . 在静电学中, 这些流线是等位势曲线, 它是

由当一个圆柱形导体被放置在指向 y 方向的均匀电场时所产生的. 我们注意到, 在一个导体的表面, 电子是以消除电场的任何切向分量的方式排列的 (即, 静电场是导体的法线, 因此它是等位势曲面).

假设一保持 0 度的圆盘被放置在一块大的导热板内, 该导热板在 y 方向有均匀的温度梯度. 由此导致的稳态温度分布的等温线就如图 6 中的流线. □

注记 在上述例子中, 我们在本质上已经确定了一个由给定的解析函数所解释的问题. 要确定得到所给问题的解答的解析函数将会困难得多. 有出版的共形映照的目录(例如, H. Kober, *Dictionary of conformal representations*, Dover Publications, Inc.,1957.)或许会有帮助. □

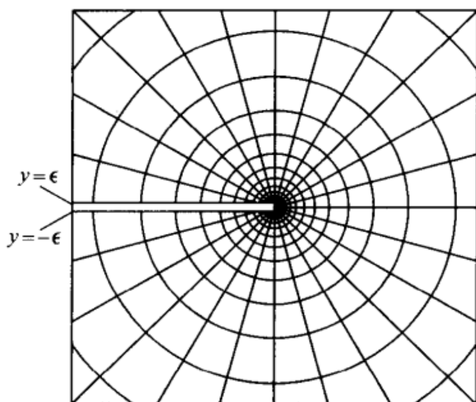


图 5

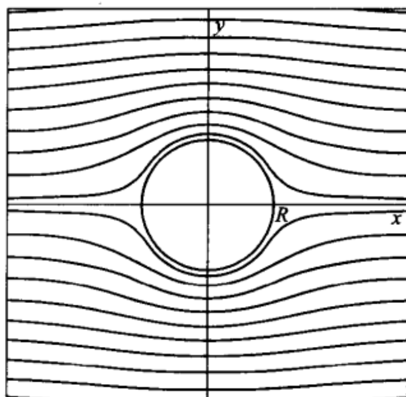


图 6

概要 6.5

1. 复解析函数: 令 $f(z)$ 是平面中开集 D 中的复变量 $z=x+iy$ 的复值函数. $f(z)$ 关于 z 的导数是极限

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h},$$

(如果极限存在) 不管复数 h 是怎样趋于 0. 如果 $f'(z)$ 对 D 中所有的 z 存在, 则称函数 $f(z)$ 在 D 上是**复解析的** (或简称**解析的**或**全纯的**). 如果 $f(z)$ 是在整个复平面上解析, 则称 $f(z)$ 是**整函数**.

2. Cauchy-Riemann 方程 (命题 1): 如果 $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在开集 D 上是解析的, 则 f 的实部和虚部 (u 和 v) 服从 **Cauchy-Riemann方程**

$$u_x = v_y \quad \text{和} \quad u_y = -v_x. \tag{S1}$$

如果 u 和 v 在 D 上还是 C^2, 则它们在 D 上是调和的. 反过来, 如果 u 和 v 是 C^1 的且在 D 上满足 Cauchy-Riemann 方程, 则 $f = u + iv$ 在 D 上是解析的.

3. 调和共轭: 令 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 是定义在某个开集 D 上的函数. 如果 $u + iv$ 在 D 上是解析的 (即, 如果 u 和 v 是 C^1 的, 且服从 Cauchy-Riemann 方程 (S1), 则 v 是 u 在 D 上的**调和共轭**. u 的任意两个调和共轭相差一个常数. 命题 3 表明定义在矩形区域 R 上的任一调和函数 u 在 R 上有调和共轭. 这对单连通区域 R(即, 没有洞) 仍然是成立的, 但例 3 表明定义在挖去一点的平面 (即, 在 $(0,0)$ 处有洞) 上的调和函数 $\ln r$, 在该挖去一点的平面上没有调和共轭. 如果 u 和 v 是调和共轭, 则水平曲线 $u =$ 常数 和水平曲线 $v =$ 常数 在任一它们梯度的公共长度不为零的点处垂直相交 (参看例 2). 在二维的应用中, 这些曲线描述为 (取决于背景) 静电等位势曲线, 稳态温度分布的等温线, 不可压缩无旋流体流的流线, 等等.(参看例 8, 例 9, 和例 10).

4. 共形映照: 一个解析函数 $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ 可看作一个变换, 它把 xy–平面 (或复 z–平面) 的某个区域 D 中的点映入 uv–平面 (或复 w–平面; $w = u + iv$) 中的某个区域 E 内的点. 如果对 D 中所有的 z, $f'(z) \neq 0$, 则 $f(z)$ 称为是**共形映照**, 因为它具有保持角度和小形状性质, 虽然局部有大约 $|f'(z)|$ 的放大倍数 (参看例 5). 命题 4 表明从 D 到 E 的共形映照可用来把 w–平面中 E 上的调和函数传递到 z–平面中的区域 D 上. 这在解不熟悉区域上的 Dirichlet 问题中是有帮助的, 如果映像区域是熟悉的 (参看例 6 和例 7). 如果想求一个在某条曲线 (例如, 等温线, 流线, 等等) 上等于常数的调和函数, 则一个把该曲线变成垂直 (或水平) 直线的共形映照的实 (或虚) 部就是这样的函数. 每个解析函数解答了某个 (可能是很有兴趣的) 问题, 但求出适当的函数用来解答一个给定的 (甚至是简单的) 问题不总是那么容易.

练习 6.5

1. (a) 对复数 $z = x + iy$, 利用幂级数定义 $\sin z = z - z^3/3! + z^5/5! + \cdots$ 和 Euler 公式 $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ 来推导 $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.
(b) 通过验证对 (a) 部分的实部和虚部 Cauchy-Riemann 方程成立来证明 $\sin z$ 是解析函数.

2. 例 3 中的论证方法表明, 定义在挖去一点平面上的调和函数 $\ln r$, $r \neq 0$ 在任一包含极点的开矩形上没有调和共轭. 为什么这个结论不与命题 3 冲突?

3. (a) 证明半径为 $b > 0$, 圆心在 $(1,0)$(即在 $z = 1$) 的圆周随着 θ 的变化由 $z = 1 + be^{i\theta}$ 绘出.

(b) 证明 (a) 部分的圆周经函数 $f(z) = z^2$ 并不映成 "完美的" 的圆周, 但随着 $b \to 0$, 映像变得更圆.

(c) 直接证明对小的 b, 该圆周放大大约 $|f'(1)|$ 倍数.

4. 画出楔形 $0 \leqslant r \leqslant 2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ 经 $w = f(z) = z^3$ 映入 w–平面的映像.

5. 利用命题 4 推断 $g(x,y) = \exp[x^2 - y^2]\sin(2xy)$ 是调和函数.

6. 假设 $U(r,\theta)$ 是圆盘 $r < R$ 的外部 $(r \geqslant R)$ 的连续函数, 且假设 $U(r,\theta)$ 是 $r > R$ 的调和函数, 满足 $U(R,\theta) \equiv 0$ 和 $|U(r,\theta)| \leqslant M$,$M$ 为某个常数. 通过完成以下步骤来证明 $U(r,\theta) \equiv 0$, $r \geqslant R$.

(a) 对任意固定的 $r_0 > R$, 证明对于 $r > 0$, 函数 $V(r,\theta;r_0) = M\frac{\ln(r/R)}{\ln(r_0/R)}$ 是调和的, 并且在圆周 $r = R$ 上等于零, 在圆周 $r = r_0$ 上等于 M.

(b) 由最大值最小值原理 (或利用第 6.4 节的习题 1) 证明在圆环 $R \leqslant r \leqslant r_0$ 上 $|U(r,\theta)| \leqslant V(r,\theta;r_0)$.

(c) 对任意固定的 r, 当 $r_0 \to \infty$ 时, 在 (b) 中的不等式两边取极限得到 $|U(r,\theta)| \leqslant 0$ (即 $U(r,\theta) \equiv 0$), 正是所需要的.

7. 证明当 Cauchy-Riemann 方程 $u_x = v_y$ 和 $u_y = -v_x$ 用极坐标表示时, 它们变成等价的一对方程 $U_r = \frac{1}{r}V_\theta$ 和 $V_r = -\frac{1}{r}U_\theta$, $r > 0$.

8. (a) 对任一实数 α, 对 $-\pi < \theta < \pi$ 和 $z = re^{i\theta}$, $r > 0$ 定义函数 $z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$. 利用习题 7 证明 z^α 是 z 在撕开的平面 $-\pi < \theta < \pi$ 上的解析函数.

(b) 证明 $z^\alpha = \exp[\alpha \mathrm{Ln} z]$, 其中 $\mathrm{Ln} z$ 是对数函数的主支, 由 $\mathrm{Ln} z = \ln r + i\theta$ 定义 (参看例 3).

(c) 对 $\alpha > \frac{1}{2}$, 证明 z^α 把扇形 $0 < \theta < \pi/\alpha$ 映到上半平面 $y > 0$ 上.

(d) 粗略地绘出对应于在扇形 $0 < \theta < \pi/\alpha$, $\alpha > 0$ 中解析函数 $f(z) = z^\alpha$ 的流体流的流线.(如果有困难, 可先考虑 $\alpha = 2$ 的情形). 在 (c) 部分的映照下这些流线会发生什么情况?

9. 设解析函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 把 z–平面中的开集 D 一一对应地共形映到 w–平面中的开区域 E 上. 则存在函数 $g(w) = x(u,v) + iy(u,v)$, 它是以下意义下 $f(z)$ 的逆: $w = f(z)$ 当且仅当 $z = g(w)$. 可以证明 $g(w)$ 是 w 的解析函数, 但不去做这种证明. 而是来证明 D 中的曲线 $y =$ 常数 被 $f(z)$ 映成 E 上与该解析函数 g 对应的流体流的流线.

10. 令 $f(z) = \sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$.

(a) 证明对区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 中任意非零的 c, $f(z)$ 把水平线 $y=c$ 映到双曲线

$$\frac{v^2}{\sin^2 c} - \frac{u^2}{\cos^2 c} = 1 \quad (u+iv=w=f(z))$$

的一支上 (上支或下支取决于 c 是正的还是负的). 对 x–轴 (即 $y=0$) 会发生什么?

(b) 注意到所有这些双曲线与 v–轴交于 -1 和 1 之间, 画出这些曲线的略图, 并说明这些曲线填满整个 w–平面除去 v–轴上的射线 $v \geqslant 1$ 和 $v \leqslant -1$.

(c) 由 (a) 和 (b) 推断 $\sinh z$ 把水平带 $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$(记作 D) 一一对应地映到开集 E 上,E 由 w–平面去掉 (b) 中的射线组成. 因此, 在 D 上的 $\sinh z$ 在 E 上存在逆 $\sinh^{-1} w$(参看习题 9).

(d) 由习题 9 推断对应于 E 上的解析函数 $\sinh^{-1} w$ 的流体流以双曲线作为它的流线. 用语言描述该流体流，并解释等势曲线是怎样静电产生的, 或怎样作为在稳态热传导过程中的等温线的.

11. (a) 令 D 由半平面 $x>0$ 去掉区间 x–轴上的 $0<x\leqslant 1$ 组成. 验证函数 $h(z)=z^2-1$ 把 D 映入平方根函数区域, 即 $\{re^{i\theta} : -\pi<\theta<\pi,\ r>0\}$(参看习题 8). 因此, 函数 $f(z)=i\sqrt{z^2-1}$ 是在 D 上有明确定义的解析函数.

(b) 描述具复速度位势 $f(z)=i\sqrt{z^2-1},\ z\in\ D$ 的流体流的流线.

提示 考虑一条在 u–轴稍微上方的直线 (比如 $v=\epsilon>0$) 在逆变换 $g(w)=\sqrt{1-w^2},\ w=u+iv,\ v>0$ 下的映像. 下面的图 7 恰当吗? 我们注意到函数 $f(z)=i\sqrt{z^2-1}$ 实际上可解析开拓到整个 z–平面去掉 x–轴上的线段 $[-1,1]$ 上. 我们已在图 7 中包含了落在半平面 $x<0$ 的流线. 这是为什么?

(c) 什么具体的物理情况将会产生如同在 (b)[①]部分求得的流线的等温线或等位势曲线?

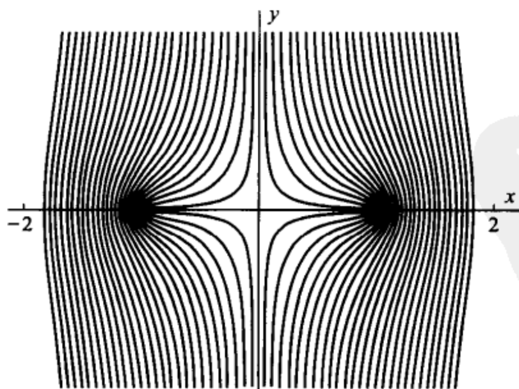


图 7

①原文误为 (a).——译者

第七章　Fourier 变换

在本章, 我们引入 Fourier 变换理论并利用它来求无限区域上偏微的解. 例如, 在各种关于 $f(x)$ 的假设下较详细的考虑无限长杆的热传导问题:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx},\quad -\infty < x < \infty,\ t > 0,\ k > 0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0) = f(x).\end{aligned}\tag{1}$$

读者或许想知道为什么这种问题有意义, 因为就实用目的来说, 所有区域 (杆) 都是有限的. 一个解释是通常在无限的情形解的形式更易处理和解释. 这对波方程已经看到, 无限弦的 D'Alembert 公式比 Fourier 级数解更易处理, Fourier 级数解通常是无穷多调和函数的和, 直接证明它的收敛性或许是困难的. 在第五章, 我们对适当的周期初始数据利用 D'Alembert 公式来解出具固定端点或自由端点的有限弦波方程, 其中没有用到 Fourier 级数 (参看第 5.2 节的定理 3, 或第 5.3 节的例 1 和例 2).

关于热方程 (即, 关于问题 (1)) 的 D'Alembert 公式的类似公式是不寻常的公式 (对 $t > 0$)

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4kt} f(y)dy,\tag{2}$$

正如我们将要证明的, 该公式是 (1) 在种种关于 $f(x)$ 的假设下唯一 "物理上合理" 的解. 特别, 如果 $f(x)$ 是连续的且是以 $2L$ 为周期的, 则由 (2) 给出的 $u(x,t)$

对长度为 $2L$ 的环形金属丝中热传导问题提供了一个周期解. 注意到 (2) 处理起来明显比在第 3.4 节中的形式 Fourier 级数解来得简单. 解 (2) 对在 x 在时刻 t 的温度 $u(x,t)$ 还有一个切意的解释, 作为基元 $\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-(x-y)^2/4kt}f(y)$(由于在不同点 y 的热源) 的连续叠加 (即, 积分). 属于固定点 y 基元在不同时刻 t 的形状在图 1 中绘出. 在每条 "Gauss 曲线" 下的面积是 $f(y)$(这里假设是正的) 高是 $\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}f(y)$. 随着 t 增加, 在 y 处的初始温度 $f(y)$ 的影响就蔓延开来.

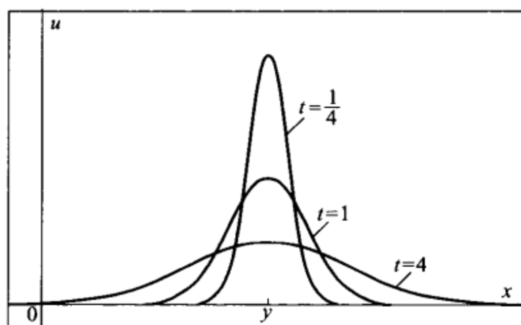


图 1

公式 (2) 以及类似的无限问题的解是通过 Fourier 变换的技巧以形式的不严格的方式发现的. 由于这个缘故, 用这种方法得到的解无论如何必须个别验证以确保它们满足所给问题. 尽管这样, 我们将证明在种种假设下 (通常不是最一般的)Fourier 变换的一些性质, 以使读者具有对认为形式上的处理很可能导出正确的解的一些根据. 我们建议读者或教师在第一次阅读时先略过较困难的证明, 而把注意力集中在例子上.

为了引出复 Fourier 变换, 在第 7.1 节我们先考虑 Fourier 级数的复形式. 第 7.2 节包括了 Fourier 变换的基本性质. 虽然反演定理的证明放在本章的最后, 然而在第 7.3 节中利用了该定理来证明 Fourier 变换的 Parseval 等式. 在第 7.4 节, 把 Fourier 变换法用于关于无限杆的热问题 (1), 并形式地获得公式 (2). 然后严格证明 (2) 满足 (1). 我们还说明了 Fourier 变换法是怎样能用于波方程问题和 Laplace 方程问题, 即使我们已经看到其他的方法是足够的. 在第 7.5 节, 利用 (2) 以及镜像法, 我们解答了在第 4.3 节遗留下来未解决的有关有限杆的形式无穷级数解的有效性问题. 镜像法和 (2) 用来解半无限杆 $(0 \leqslant x < \infty)$ 热问题. 对热问题利用 (2) 和镜像法, 本质上与 5.3 节中对波问题利用 D'Alembert 公式和镜像法相同. 引入了 Fourier 正弦变换和 Fourier 余弦变换, 但没有详细

讨论它们, 因为由这些变换获得的结果通过利用通常的 Fourier 变换结合镜像法可不费力地得到.

历史注记和现代前景

在 18 世纪后期和 19 世纪初, 科学家和数学家受到求解有限区间初边值问题的 Fourier 级数方法成功的鼓舞, 他们寻求 Fourier 级数的一个适当的连续的变体, 涉及用积分来代替无穷级数. 这种变体使得他们能对某些非周期函数给出积分表示. 而且这种表示将得出更为容易处理和理解的封闭形式的解 (即, 不涉及无穷级数; 参看 (2)). Fourier 变换 (或积分) 的想法是受到 Pierre-Simon de Laplace(1749—1827) 工作的启发, 且主要归功于 Joseph Fourier(1768—1830),Augustin-Louis Cauchy(1789—1857) 和 Simon D. Poisson(1781—1840). 在 1811 年, 他们三人都向巴黎科学院口头陈述了他们的文章，而且每个人都从其他人的详细解释中受益.

Fourier 变换的概念是积分变换 (或算子, 参看第 1.2 节) 符号的一个特殊情形. 任给一个 "比较好的" 函数 $K(x,\xi)$, 可由下式定义函数 $f(x)$ 的积分变换 $F(\xi)$ 或 $T[f](\xi)$:

$$F(\xi) \equiv T[f](\xi) = \int_a^b K(x,\xi) f(x) dx, \tag{3}$$

其中固定的积分限 a 和 b 可以是有限或无穷. 根据 (3), 每个适当的函数 f 变换成一个新的函数 F 或 $T[f]$. 这种变换在下述意义下是线性的: $T[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 T[f_1] + c_2 T[f_2]$. 该变换由积分限 a 和 b 的选取而确定, 函数 $K(x,\xi)$ 称为该变换的**核**. 一些广泛使用的由积分限和核定义的变换在下表列出.

表 7.1 一些常见的积分变换

$K(x,\xi)$	积分限	变换名称
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\xi x}$	$a=-\infty \quad b=\infty$	Fourier
$e^{-\xi x}$	$a=0 \quad b=\infty$	Laplace
$x^{\xi-1}$	$a=0 \quad b=\infty$	Mellin
$\frac{1}{\pi}\frac{1}{x+\xi}$	$a=-\infty \quad b=\infty$	Hilbert
$\frac{1}{\sqrt{4\pi\xi}} e^{-x^2/4\xi}$	$a=-\infty \quad b=\infty$	Weierstrass

选用哪个变换取决于着手处理问题的特性. Fourier 变换在求解偏微中有帮助, 首先因为它把求导转化为下述意义下简单的代数乘法: $T[f'](\xi) = i\xi T[f](\xi)$ (参看第 7.2 节的命题 1). Laplace 变换适合线性常微方程组的初值问题, 是理想

的工具. 为了用代数方法解这种问题, 英国电子工程师 Oliver Heaviside(1850—1925) 基于 Laplace 变换和 Fourier 变换发展了广泛应用的 "算子微积分".

与 Fourier 级数一样, Fourier 变换除了求解微分方程之外还有许多基本用途. 在 $[-L, L]$ 上函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数 a_n 和 b_n 告诉我们谐函数 $\sin\frac{n\pi x}{L}$ 和 $\cos\frac{n\pi x}{L}$ 在参与函数的构成中是如何重要. 对定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的函数 $f(x)$, 在某点 ξ 的 Fourier 变换

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx,$$

告诉我们谐函数 $\sin(\xi x)$ 和 $\cos(\xi x)$ 在函数的构成中是何等的重要. 把一个在进行实验检查的物体看作是未知函数通常是有用的, 而且认识该物体的最初方式就是测量它对由各种频率 $\xi/2\pi$ 发射的探测器 (例如, 光线, X–射线, 微波, 电子信号, 声波, 等等) 的反应. 反应的程度可能认为是与该未知物体的组成中具频率 ξ 的谐函数的权重成比例 (即, 未知函数的 Fourier 变换在 ξ 的值). 然后希望从这些反应来近似该未知物. 换言之, 希望从函数的 Fourier 变换来确定该函数. 这里有个结果 (反演定理) 表明对一大类函数可以这样做. (这与 Fourier 级数的收敛定理类似, 这些收敛定理由它们的 Fourier 系数重新构造了某些函数.) 在现实情况中, 一个物体的频率反应可以依赖于该物体被探测的角度, 所以问题会非常复杂, 可能一次不同的多方面的变换或许更合适. 例如, Radon 变换以及它的反演定理由 Johann Radon (1887—1956) 在他 1917 年的论文 "*Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Manningfaltigkeiten*" ([Radon],[Deans]) 中发展起来的. 虽然该论文在 1970 年前在应用领域实际上鲜为人知, 但如今在医学诊断, 大气物理, 天文学, 光谱学, 统计学, 地球物理学, 应力分析等领域使用 Radon 积分变换是必要的. 因为由物体的频率反应来确定物体的问题 (即,**反问题或重新构建问题**) 在科学上几乎是包罗万象的, 所以积分变换是许多可供选择的基本工具.

§7.1 复 Fourier 级数

回忆一下定义在 $-L \leqslant x \leqslant L$ 上适当的函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数是

$$\text{FS}f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{1}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \quad 和 \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

为了得到 Fourier 级数的复形式, 要利用 Euler 公式 (参看第 1.1 节的 (24))

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y, \tag{2}$$

由此得

$$\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}) \quad 和 \quad \sin y = -\frac{i}{2}(e^{iy} - e^{-iy}). \tag{3}$$

取 $y = \frac{n\pi x}{L}$, 且 (1) 中的 $\cos\frac{n\pi x}{L}$ 和 $\sin\frac{n\pi x}{L}$ 用 (3) 中相应的公式替换, 得

$$\begin{aligned}
\mathrm{FS}f(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}a_n(e^{in\pi x/L} + e^{-in\pi x/L}) - \frac{1}{2}ib_n(e^{in\pi x/L} - e^{-in\pi x/L})\right) \\
&= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{in\pi x/L} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-in\pi x/L}\right) \qquad (4) \\
&= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{in\pi x/L} + \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n})e^{in\pi x/L}.
\end{aligned}$$

令 $c_0 = \frac{1}{2}a_0$. 对 $m = 1, 2, 3, \cdots$, 定义

$$\begin{aligned}
c_m &= \frac{1}{2}(a_m - ib_m) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\left(\cos\frac{m\pi x}{L} - i\sin\frac{m\pi x}{L}\right)dx \\
&= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-im\pi x/L}dx.
\end{aligned}$$

对 $m = -1, -2, -3, \cdots$, 定义

$$\begin{aligned}
c_m &= \frac{1}{2}(a_{-m} + ib_{-m}) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\left(\cos\frac{-m\pi x}{L} + i\sin\frac{-m\pi x}{L}\right)dx \\
&= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-im\pi x/L}dx.
\end{aligned}$$

则 (4) 可写成以下形式

$$\mathrm{FS}_c\ f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\pi x/L},$$

其中

$$c_m = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-im\pi x/L} dx, m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{5}$$

形式表示 $\mathrm{FS}_c\ f(x)$ 称为 $f(x)$ 的**复 Fourier 级数**.

如果 FS $f(x)$ 在 x 处收敛, 则不论是用 $\mathrm{FS}_c\ f(x)$ 还是 FS $f(x)$ 显然得到相同的结果, 即

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{m=-N}^{N} c_m e^{im\pi x/L} = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right).$$

因此, 第四章所有收敛性结果可搬到关于复 Fourier 级数相应的结果. 有意思的是复 Fourier 级数计算起来通常比 "普通" Fourier 级数更简单.

例 1 计算 $f(x) = e^{ax}$, $-L \leqslant x \leqslant L$ 的复 Fourier 级数, 其中 a 是实常数.

解 我们有

$$\begin{aligned}
c_m &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{ax} e^{-im\pi x/L} dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{(a-(im\pi/L))x} dx \\
&= \frac{1}{2L}\frac{1}{a - im\pi/L} e^{(a-(im\pi/L))x}\Big|_{-L}^{L} = \frac{1}{2}\frac{1}{aL - im\pi}(e^{aL}e^{-im\pi} - e^{-aL}e^{im\pi}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{aL + im\pi}{(aL)^2 + (m\pi)^2}\left(e^{aL}(\cos(m\pi) - i\sin(m\pi)) - e^{-aL}(\cos(m\pi) + i\sin(m\pi))\right) \\
&= (-1)^m \frac{1}{2}\frac{e^{aL} - e^{-aL}}{(aL)^2 + (m\pi)^2}(aL + im\pi) = (-1)^m \sinh(aL)\frac{(aL + im\pi)}{(aL)^2 + (m\pi)^2}.
\end{aligned}$$

对 $m \geqslant 0$, c_m 的实部是 $\frac{1}{2}a_m$, 虚部是 $-\frac{1}{2}b_m$. 请读者直接计算这些普通 Fourier 系数. 当然, $f(x)$ 的复 Fourier 级数就是 $\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\pi x/L}$, 其中 c_m 由上面给出. □

函数 $e^{im\pi x/L}$ 是复值的. 在 $[-L, L]$ 上分段连续的两个复值函数 $f(x)$ 和

$g(x)$ 的**内积**定义为以下复数

$$\langle f, g\rangle \equiv \int_{-L}^{L} f(x)\overline{g(x)}dx, \tag{6}$$

其中 $\overline{g(x)}$ 是 $g(x)$ 的共轭复数. 因此, 如果 $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ 和 $g(x) = g_1(x) + ig_2(x)$, 其中 f_1, f_2, g_1 和 g_2 是实值的, 则

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \int_{-L}^{L}[f_1(x) + if_2(x)][g_1(x) - ig_2(x)]dx \\ &= \int_{-L}^{L}[f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x)]dx + i\int_{-L}^{L}[f_2(x)g_1(x) - f_1(x)g_2(x)]dx.\end{aligned}$$

虽然 $\langle f, g\rangle$ 一般不是实数, 但 f 与自身的内积是实的且是非负的:

$$\langle f, f\rangle = \int_{-L}^{L} f(x)\overline{f(x)}dx = \int_{-L}^{L}|f(x)|^2 dx \geqslant 0.$$

于是范数 $\|f\|$, 定义为 $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$, 有意义. 而且当 f 和 g 是实值时 $\langle f, g\rangle$ 的定义与第 4.1 节中的定义相同. 利用符号 $e_m(x) = e^{im\pi x/L}$, 有

$$\begin{aligned}\langle e_m, e_n\rangle &= \int_{-L}^{L} e^{im\pi x/L}\overline{e^{in\pi x/L}}dx = \int_{-L}^{L} e^{i(m-n)\pi x/L}dx \\ &= \int_{-L}^{L}\left(\cos\frac{(m-n)\pi x}{L} + i\sin\frac{(m-n)\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases}0, & \text{如果 } m \neq n, \\ 2L, & \text{如果 } m = n.\end{cases}\end{aligned}$$

我们称族 $\{e_m\}, m = 0, \pm1, \pm2, \cdots$ 构成了**具范数平方** $\|e_m\|^2 = 2L$ **的正交族**. 复 Fourier 系数 c_m 实质上是可取复值的函数 f 关于该族的分量, 即

$$c_m = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-im\pi x/L}dx = \frac{1}{2L}\langle f, e_m\rangle.$$

如果函数 f 足够好 (例如, 如果 f 是连续的且分段 C^1, 并有 $f(-L) = f(L)$), 则我们知道 (参看第 4.2 节的定理 4)Fourier 级数 (复的或普通的) 收敛到 $f(x)$, 因此

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\pi x/L} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\langle f, \frac{1}{\sqrt{2L}}e_m\rangle\frac{1}{\sqrt{2L}}e_m(x),$$

此为 f 以 "单位正交向量" $\frac{1}{\sqrt{2L}}e_m$ 的展开式. 复 Fourier 系数的 Parseval 等式 (参看第 4.2 节) 呈现了一种优雅的形式:

$$\begin{aligned}\|f\|^2 = \int_{-L}^{L}|f(x)|^2dx &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}|\langle f, \frac{1}{\sqrt{2L}}e_m\rangle|^2 \\ &= 2L\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{2L}\langle f, e_m\rangle\right|^2 = 2L\sum_{m=-\infty}^{\infty}|c_m|^2.\end{aligned}$$

这表明该结果对任一函数 (可以是复值的)$f(x)$ 成立, 只要 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx < \infty$. 当 $f(x)$ 是实值的, 该结果由第 4.2 节的 Parseval 等式得到, 因为对于 $m = \pm1, \pm2, \cdots$, $|c_m|^2 = \frac{1}{4}(a_{|m|}^2 + b_{|m|}^2)$ 以及 $|c_0|^2 = \frac{1}{4}a_0^2$. 为方便起见, 对 Parseval 等式的复形式叙述如下:

定理 (Parseval 等式)　令 $f(x)$ 是定义在 $[-L, L]$ 上的实值或复值函数, 则

$$\|f\|^2 = \int_{-L}^{L}|f(x)|^2dx = 2L\sum_{m=-\infty}^{\infty}|c_m|^2,$$

其中

$$c_m = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-im\pi x/L}dx, m = 0, \pm1, \pm2, \cdots,$$

是 $f(x)$ 的复 Fourier 系数.

例 2　如果 $f(x) = e^{ax}$, $-L \leqslant x \leqslant L$, 其中 $a \neq 0$ 且是实数, Parseval 等式表达了什么?

解　我们有

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L}|f(x)|^2dx &= \int_{-L}^{L}e^{2ax}dx = \frac{1}{2a}e^{2ax}\bigg|_{-L}^{L} = \frac{1}{2a}(e^{2aL} - e^{-2aL}) \\ &= \frac{1}{2a}(e^{aL} + e^{-aL})(e^{aL} - e^{-aL}) = \frac{2}{a}\cosh(aL)\sinh(aL).\end{aligned}$$

由例 1, $|c_m|^2 = \frac{\sinh^2(aL)}{a^2L^2+m^2\pi^2}$, 所以 Parseval 等式得出

$$\frac{2}{a}\cosh(aL)\sinh(aL) = 2L\sinh^2(aL)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{a^2L^2+m^2\pi^2}.$$

对 $L = \pi$, 得

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2+m^2} = \frac{\pi\cosh(a\pi)}{a\sinh(a\pi)} = \frac{\pi}{a}\coth(a\pi). \qquad \square$$

下面的定义在后面将会有用的.

定义 一定义在 $(-\infty,\infty)$ 上实值或复值函数称为在 $(-\infty,\infty)$ 上绝对可积的, 如果 $\int_{-R}^{R}|f(x)|dx$ 对所有 $R>0$ 存在, 且

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}|f(x)|dx < \infty. \tag{7}$$

例如, $(1+x^2)^{-1}$ 是绝对可积的, 因为 $\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-1}dx = \pi < \infty$, 但 $x/(1+x^2)$ 不是绝对可积的. 的确, 虽然 $\int_{-R}^{R}x/(1+x^2)dx = 0$, 但

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{x}{1+x^2}\right|dx &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\left|\frac{x}{1+x^2}\right|dx \\ &= \lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R}\frac{2x}{1+x^2}dx == \lim_{R\to\infty}\ln(1+R^2) = \infty.\end{aligned}$$

Fourier 变换

设 $f(x)$ 是实变量 $x\in(-\infty,\infty)$ 的实值或复值函数. $f(x)$ 的 **Fourier变换**是当下式的极限存在时由它定义的实变量 $\xi\in(-\infty,\infty)$ 的函数 $\hat{f}(\xi)$

$$\hat{f}(\xi) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx \equiv \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)e^{-i\xi x}d'x, \tag{8}$$

其中

$$d'x \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx.$$

有些别扭的因子 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$(我们用符号 $d'x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx$ 把它掩饰起来) 在其他的书籍中有时略去. 用这里的符号, 将发现对 "好的" 函数 $f(x)$, 下面的 **Parseval等式**(关于 Fourier 变换) 成立

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\xi)|^2d\xi = \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx,$$

(参看第 7.3 节). 如果在 $\hat{f}(\xi)$ 的定义 (8) 中的因子 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 略去, 则在 Parseval 等式的左边就得插入因子 $(2\pi)^{-1}$. 注意到在定义 (8) 中, 我们暗中假设积分 $\int_{-R}^{R} f(x)e^{-i\xi x}dx$ 对所有实数 R 都存在, 但没有假设 $f(x)$ 是绝对可积的. 如果 (8) 中的极限存在, 则该极限称为广义积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx$ 的 **Cauchy主值**. 即使 $f(x)$ 不是绝对可积的, 但 Cauchy 主值可以存在.

如果 $\xi = m\pi/L$, 则 $\hat{f}(\xi)$ 看上去很像一个复 Fourier 系数. 的确, 假设 $f_1(x)$ 是对 $-L \leqslant x \leqslant L$ 有定义的 "好的" (例如, 分段连续) 函数. 通过下式把 $f_1(x)$ 延拓到对所有 x 有定义的函数:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & |x| \leqslant L, \\ 0, & |x| > L. \end{cases}$$

$f_1(x)$ 的复 Fourier 系数由以下给出

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_1(x)e^{-im\pi x/L}dx = \frac{1}{2L}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(m\pi/L)x}dx \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2L}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(m\pi/L)x}d'x = \frac{\sqrt{2\pi}}{2L}\hat{f}(\frac{m\pi}{L}). \end{aligned}$$

因此, $f_1(x)$ 的 c_m 实质上是通过求延拓函数 $f(x)$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}(\xi)$ 在点 $\xi = m\pi/L$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 的值得到. 后面 (参看第 7.3 节) 将利用这个事实, 但在本节剩下的部分我们来考虑一些例子.

例 3 求 $f(x) = e^{-a|x|}$ 的 Fourier 变换, 其中 $a > 0$ 和 $x \in (-\infty, \infty)$.

解 计算

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}e^{-i\xi x}d'x = \int_{0}^{\infty} e^{-ax}e^{-i\xi x}d'x + \int_{-\infty}^{0} e^{ax}e^{-i\xi x}d'x \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\xi)x}d'x + \int_{0}^{\infty} e^{-(a-i\xi)u}d'u \quad (\text{其中} \quad u = -x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left.\frac{e^{-(a+i\xi)x}}{-(a+i\xi)}\right|_0^{\infty} + \left.\frac{e^{-(a-i\xi)x}}{-(a-i\xi)}\right|_0^{\infty}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a+i\xi} + \frac{1}{a-i\xi}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{a^2+\xi^2}. \end{aligned}$$

□

例 4 求下面函数的 Fourier 变换

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant L, \\ 0, & |x| > L. \end{cases}$$

解 由于对 $|x|>L$, $f(x)=0$, 所以

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}d'x = \int_{-L}^{L} e^{-i\xi x}d'x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left.\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi}\right|_{-L}^{L} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\xi L}-e^{i\xi L}}{-i\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2\sin(\xi L)}{\xi}.\end{aligned}$$

注意到即使 $f(x)$ 对区间 $[-L,L]$ 外的 x 为零, 但同样的情况对 $\hat{f}(\xi)$ 不真. 一般可以证明如果 f 是分段连续的, 且 f 和 $\hat{f}$ 在 $[-L,L]$ 之外为零, 则除了有限多个点之外, $f(x)=0$. □

例 5 通过计算下面函数的 Fourier 变换来说明一个实值函数的 Fourier 变换不必是实值的.

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant L,\\ 0, & \text{其他处}.\end{cases}$$

解 我们有

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{0}^{L} e^{-i\xi x}d'x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left.\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi}\right|_{0}^{L} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\xi L}-1}{-i\xi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\cos(\xi L)-i\sin(\xi L)-1}{-i\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(\xi L)-i(1-\cos(\xi L))}{\xi}.\end{aligned}$$ □

例 6 令 $f(x)=e^{-\frac{1}{2}ax^2}$, $a>0$, $-\infty<x<\infty$. 证明

$$\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2-i\xi x}d'x=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{1}{2}\xi^2/a}.$$

解 被积函数的指数配平方变成 $-\frac{a}{2}(x+i\frac{\xi}{a})^2-\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{a}$. 因此,

$$\hat{f}(\xi)=e^{-\frac{1}{2}\xi^2/a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}a(x+i\xi/a)^2}d'x\equiv e^{-\frac{1}{2}\xi^2/a}I(\xi). \tag{9}$$

现来证明由 (9) 定义的积分 $I(\xi)$ 实际上是与 ξ 无关的常数. 的确, 经积分号下求导数 (参看 Leibniz 法则, 附录 3), 得

$$\begin{aligned}I'(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\xi}e^{-\frac{1}{2}a(x+i\xi/a)^2}d'x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}a(x+i\xi/a)^2}\big(-a(x+i\frac{\xi}{a})\big)\frac{i}{a}d'x \\ &= \frac{i}{a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}a(x+i\xi/a)^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}=0.\end{aligned}$$

于是 $I(\xi)$ 是常数, 且

$$I(\xi)=I(0)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}ax^2}d'x.$$

为了计算 $I(0)$, 我们借助于一个绝妙的技巧 (涉及极坐标), 读者以前或许见过这种技巧:

$$\begin{aligned}|I(0)|^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}ax^2}d'x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}ay^2}d'y\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}a(x^2+y^2)}dxdy\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-\frac{1}{2}ar^2}rdrd\theta=\left.\frac{e^{-\frac{1}{2}ar^2}}{-a}\right|_0^{\infty}=\frac{1}{a},\end{aligned}$$

由此得 $I(0)=\frac{1}{\sqrt{a}}$. 于是, 我们得

$$\hat{f}(\xi)=e^{-\frac{1}{2}\xi^2/a}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}a(x+i\xi/a)^2}d'x=e^{-\frac{1}{2}\xi^2/a}I(\xi)=e^{-\frac{1}{2}\xi^2/a}I(0)=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{1}{2}\xi^2/a}.$$

于是, 如果 $f(x)=e^{-\frac{1}{2}ax^2}$, 则 $\hat{f}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{1}{2}\xi^2/a}$.

当 $a=1$ 时, 注意到 f 和 $\hat{f}$ 结果是相同的函数. 有无穷多线性无关的函数具有这种性质 (参看练习 7.2 的问题 13 和问题 14). □

注记 附录 5 有 Fourier 变换表.

概要 7.1

1. 复 Fourier 级数: 令 $f(x)$ 是定义在 $[-L,L]$ 上的函数, 则 $f(x)$ 的**复 Fourier 级数**是以下展开式

$$\mathrm{FS}_c\, f(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m e^{im\pi x/L},\quad 其中\quad c_m=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)\,e^{-im\pi x/L}dx, \tag{S1}$$

$m=0,\pm1,\pm2,\cdots$, 只要所有这些积分存在. 由于 $\mathrm{FS}_c\, f(x)$ 从 $-N$ 到 N 的部分和与通常的 Fourier 级数 FS $f(x)$ 从 0 到 N 的部分和相同, 所以在第 4.2 节中的所有收敛性结果对复 Fourier 级数也成立. Parseval 等式用复 Fourier 系数表示变成

$$\int_{-L}^{L}|f(x)|^2dx=2L\sum_{m=-\infty}^{\infty}|c_m|^2. \tag{S2}$$

(S2) 的左边是范数的平方 $\|f\|^2$ ，相对于范数平方为 $2L$ 的正交族 $e_m(x) \equiv e^{im\pi x/L}(m = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$, 右边与 f 的分量 $\langle f, e_m\rangle$ 的模的平方的和成比例. 注意到 $c_m = \frac{1}{2L}\langle f, e_m\rangle$.

2. Fourier 变换: 设 $f(x)$ 是实变量 $x(-\infty < x < \infty)$ 的实值或复值函数. $f(x)$ 的 **Fourier 变换**是由下面的极限 (Cauchy 主值) 存在时所定义的函数 $\hat{f}(\xi)$

$$\hat{f}(\xi) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx \equiv \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)e^{-i\xi x}d'x, \tag{S3}$$

其中 $d'x = \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$. 在第 7.3 节, 我们证明对 “好的” 函数 $f(x)$, 以下的 **Parseval等式**(关于 Fourier 变换) 成立:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx. \tag{S4}$$

练习 7.1

1. 计算下列定义在 $[-L, L]$ 上的函数的复 Fourier 级数:

(a) $f(x) = x$ (b) $f(x) = x^2$

(c) $f(x) = L - |x|$ (d) $f(x) = \frac{x}{|x|}(L - |x|)$

(e) $f(x) = x^N e^{ax},\ N = 1, 2, \cdots$ (f) $f(x) = e^{ax}\cos(bx)$.

2. (a) 验证 $\sum_{n=-N}^{N} e^{in\theta} = 1 + 2\cos\theta + 2\cos(2\theta) + \cdots + 2\cos(N\theta)$.

(b) 利用结果 $\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}$(对任意 $z \neq 1$ 的复数成立) 证明

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{in\theta} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\theta)}{\sin(\frac{1}{2}\theta)}.$$

(c) 推断 $\frac{1}{2} + \cos\theta + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(N\theta) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\theta)}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)}$, 正如在第 4.2 节以不同方式证明的.(回忆起这是 Dirichlet 核.)

3. 求下列函数的 Fourier 变换

(a) $f(x) = \begin{cases} L - |x|, & |x| < L, \\ 0, & |x| > L. \end{cases}$ (b) $f(x) = e^{-a|x|}\cos(bx),\ a, b > 0$

(c) $f(x) = e^{-\frac{1}{2}ax^2}\sin(bx),\ a > 0$ (d) $f(x) = xe^{-\frac{1}{2}ax^2}\left(= -\frac{1}{a}\frac{d}{dx}e^{-\frac{1}{2}ax^2}\right)$.

4. (a) 验证 Fourier 变换是线性的, 即, 对任意复数 a 和 b, $(af + bg)^\wedge(\xi) = a\hat{f}(\xi) + b\hat{g}(\xi)$.

(b) 对任意实数 c, 验证 $[f(x+c)]^\wedge(\xi) = e^{ic\xi}\hat{f}(\xi)$ 以及 $[e^{icx}f(x)]^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi - c)$.

5. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的连续, 绝对可积函数. 证明: 如果 $f(x)$ 是以 $2L$ 为周期的, 则 $f(x)$ 必恒等于零.

6. 证明以下 Bessel 不等式的复形式. 假设 $|f(x)|^2$ 在 $[-L, L]$ 是可积的. 证明

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2 \leqslant \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx, \quad \text{其中} \quad c_m = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-im\pi x/L} dx,$$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

提示 令 $S_N(x) = \sum_{m=-N}^{N} c_m e^{im\pi x/L}$ 表示 $\mathrm{FS}_c\, f(x)$ 的 N 项部分和, 考虑由 $\sigma_N^2 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} |f(x) - S_N(x)|^2 dx$ 定义的**平方差平均** σ_N^2. 现利用事实 $|f(x) - S_N(x)|^2 = [f(x) - S_N(x)][\overline{f(x)} - \overline{S_N(x)}]$, 其中 $\overline{f(x)}$ 表示 $f(x)$ 的复共轭. 剩下的论证几乎一字不差的如同实形式情形 (见第 4.2 节).

7. 令 $f(x) = e^{i\beta x}$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, 其中 β 是实数, 但不是整数. 利用复 Fourier 级数的 Parseval 等式证明 $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi(\beta - m))}{(\beta - m)^2} = \pi^2$.

8. 令 $f(x) = \pi\cos(\alpha x)$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, 其中 α 不是整数. 推导下面属于 Euler 的公式

$$1 + 2\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha^2 - k^2} = \frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

提示 先求出 $f(x)$ 的 Fourier 级数的复形式.

9. 证明以下函数有相同的 Fourier 变换 (注意到 f 和 g 只在一些点上不同):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果} \quad |x| > 1, \\ 2, & \text{如果} \quad |x| = 1, \\ 1, & \text{如果} \quad |x| < 1. \end{cases} \quad \text{和} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果} \quad |x| < 1, \\ 1, & \text{如果} \quad -1 \leqslant x < 1, \\ 0, & \text{如果} \quad |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

10. **关于 Fourier 变换的 (Riemann-Lebesgue 引理)**. 设复值, 分段连续的函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上绝对可积 (即 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$). 可用以下标准结果: 对复值函数 $g(x)$, 如果 $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty$, 则 $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} g(x) dx$ 存在, 且 $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx$.

(a) 证明 $\hat{f}(\xi)$ 存在, 即, 对任意实数 ξ, $\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} f(x) e^{-i\xi x} dx$ 存在.

(b) 证明 $|\hat{f}(\xi)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$(即 $|\hat{f}(\xi)|$ 是有界的).

(c) 假设 $\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x+a)| dx = 0$.(利用附录 3 中的控制收敛定理, 如果 $f(x)$ 是绝对可积和分段连续的, 则该事实成立.) 证明 $\lim_{\xi\to\pm\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$.

提示 先证明

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -f(x) e^{-i\xi(x - \pi/\xi)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -f(y + \frac{\pi}{\xi}) e^{-i\xi y} dy.$$

然后注意到

$$2\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - f(x + \frac{\pi}{\xi})) e^{-i\xi x} dx.$$

11. 给出定义在 $(-\infty,\infty)$ 上 C^∞ 函数 $f(x)$ 的例子, 使得

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}|f(x)|dx$$

不存在, 但

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)dx$$

却存在.

12. 令 $f(x)=\begin{cases}1, & \text{如果}\quad n<x<n+\frac{1}{n^2}, \quad n=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\\ 0, & \text{在其他的点}.\end{cases}$

(a) 绘出 $-4\leqslant x\leqslant 4$, $f(x)$ 的草图.

(b) 验证

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty.$$

(c) 证明当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 的极限不存在. 特别, 当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 不趋于零.(作为对照, 我们知道收敛的无穷级数的通项趋于零).

(d) 构造一个严格正的函数 $g(x)$, 它在 $(-\infty,\infty)$ 上绝对可积, $\lim_{x\to\infty}g(x)$ 不存在且 $g(x)$ 是无界的.

提示 在 $f(x)$ 的定义中, 考虑用 n 替换 1, 用 $\frac{1}{|n|^3}$ 替换 $\frac{1}{n^2}$ 以及用 $\frac{1}{1+x^2}$ 替换 0 的结果.

§7.2 Fourier 变换的基本性质

在本节, 我们建立在施行 Fourier 变换中有用的公式. 这些公式对那些衰减 (即, 当 $|x|\to\infty$ 时趋于 0) 足够快的函数 (以及它们的导数) 是成立的. 更精确地表述为如下:

定义 函数 $f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ 具有**衰减阶**(m,n), 其中 m 和 n 是非负整数, 如果 $f(x)$ 是 C^m 的, 且存在常数 $K>0$ 使得对所有具 $|x|\geqslant 1$ 的 x,

$$|f(x)|+|f'(x)|+\cdots+|f^{(m)}(x)|\leqslant\frac{K}{|x|^n}. \tag{1}$$

注记 如果 $m=0$, 即假设 $f(x)$ 是在 $(-\infty,\infty)$ 上连续的. 注意到 (1) 中的常数 K 依赖于 f, m 和 n. 换言之, f 和它的前 m 阶导数当 $x\to\infty$ 时至少以

$K|x|^{-n}$ 衰减. 显然, 如果 f 具有衰减阶 (m,n), 则它也具有衰减阶 (m',n'), 其中 $0 \leqslant m' \leqslant m$ 和 $0 \leqslant n' \leqslant n$. 对所有的 m, $n \geqslant 0$, 具有衰减阶 (m,n) 的函数称为是**速减的**. 显然, 任意一个在一闭区间外恒等于零的 C^∞ 函数是速减的. 下面的例子说明存在不等于零的速减函数. □

例 1 证明 e^{-x^2} 是速减的.

解 对任一 $k \geqslant 0$ 以及任一实数 $x \neq 0$, 下面的估计成立:

$$e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \cdots + \frac{1}{k!}x^{2k} + \cdots} \leqslant \frac{1}{\frac{1}{k!}x^{2k}} = \frac{k!}{x^{2k}}.$$

因此, 对任意 $k \geqslant 0$, e^{-x^2} 衰减得比 $k!|x|^{-2k}$ 要快. e^{-x^2} 的 m 阶导数具有形式 $p_m(x)e^{-x^2}$, 其中 $p_m(x)$ 是一 m 次多项式. 存在常数 d_m, 使得对 $|x| \geqslant 1$, 有 $|p_m(x)| \leqslant d_m|x|^m$(参看习题 9). 因此, 如果 $f(x) = e^{-x^2}$, 则对 $|x| \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}|f(x)| + |f'(x)| + \cdots + f^{(m)}(x)| &\leqslant (d_0 + d_1|x| + \cdots + d_m|x|^m)e^{-x^2}\\ &\leqslant (d_0 + \cdots + d_m)|x|^m e^{-x^2} \leqslant k!(d_0 + \cdots + d_m)|x|^{m-2k}.\end{aligned}$$

任给 $(m,n)(m,n \geqslant 0)$, 可取 k 如此大, 使得 $2k - m \geqslant n$. 则上面的不等式表明 $f(x)$ 具有衰减阶 (m,n), 由此得 $f(x)$ 是速减的. 注意到导数 $f^{(m)}(x) = p_m(x)e^{-x^2}$ 都是连续的, 正如所要求的. 函数 $e^{-|x|}$ 不是速减的, 因为它的导数在 $x = 0$ 处不存在, 虽然对 $|x| \geqslant 1$ 它具有所要求的性质. □

从微分方程的观点来看, 也许 Fourier 变换一个非常重要的性质是把求导转化为在下面命题意义下的以 $i\xi$ 乘函数. 正如我们将看到的, 某些偏微分方程 (具常系数) 则转化成更简单的方程 (例如, 常微分方程).

命题 1 令 $f(x)$ 具有衰减阶 $(1,2)$(即 f 是 C^1 的, 且对 $|x| \geqslant 1$ 和某个常数 $K > 0, |f(x)| + |f'(x)| \leqslant K|x|^{-2}$). 则对所有实数 ξ, 有

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^{\wedge}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi). \tag{2}$$

证明 为了证明 $\hat{f}(\xi)$ 存在, 只消证明 $f(x)$ 是绝对可积的 (参看练习 7.1 的

习题 10). 我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=\int_{-1}^{1}|f(x)|dx+\int_{|x|>1}|f(x)|dx$$
$$\leqslant\int_{-1}^{1}|f(x)|dx+2\int_{1}^{\infty}Kx^{-2}dx=\int_{-1}^{1}|f(x)|dx+2K<\infty.$$

同理可证 $[f'(x)]^\wedge(\xi)$ 存在. 利用分部积分以及事实 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, 得 (回忆起 $d'x\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx$, 如在第 7.1 节的 (8))

$$[f'(x)]^\wedge(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)e^{-i\xi x}d'x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)e^{-i\xi x}\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)(-i\xi)e^{-i\xi x}d'x$$
$$=(i\xi)\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}d'x=i\xi\hat{f}(\xi).$$

□

推论 1 如果 $f(x)$ 具有衰减阶 $(m,2)$, 则对所有的实数 ξ,

$$[f^{(m)}(x)]^\wedge(\xi)=i^m\xi^m\hat{f}(\xi). \tag{3}$$

证明 由于 $f(x)$ 具有衰减阶 $(m,2)$, 所以 $f'(x)$ 具有衰减阶 $(m-1,2)$, $f''(x)$ 具有衰减阶 $(m-2,2),\cdots$, 以及 $f^{(m-1)}(x)$ 具有衰减阶 $(1,2)$. 特别, 所有这些导数具有衰减阶 $(1,2)$, 反复应用命题 1, 得

$$\begin{aligned}[f^{(m)}(x)]^\wedge(\xi)&=[(f^{(m-1)})'(x)]^\wedge(\xi)=i\xi[f^{(m-1)}(x)]^\wedge(\xi)\\&=(i\xi)[(f^{(m-2)})'(x)]^\wedge(\xi)=(i\xi)^2[f^{(m-2)}(x)]^\wedge(\xi)\\&=\cdots=(i\xi)^m\hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

□

命题 2 假设 $f(x)$ 具有衰减阶 $(0,3)$, 即 $f(x)$ 是连续的且对 $K>0$, 有 $|f(x)|\leqslant K|x|^{-3}$, $|x|\geqslant 1$. 则对所有实数 ξ, 有

$$i\frac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi)=[xf(x)]^\wedge(\xi). \tag{4}$$

证明 由于 $f(x)$ 具有衰减阶 $(0,3)$, 所以 $f(x)e^{-i\xi x}$ 和它关于 ξ 的导数 $-ixf(x)e^{-i\xi x}$ 是绝对可积和连续的. 因此, 由 Leibniz 法则 (参看附录 3) 得

$$i\frac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi)=i\frac{d}{d\xi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}d'x=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)e^{-i\xi x}d'x.$$

□

反复运用 (4) 得到以下结果 (参看习题 6).

推论 2 如果 $f(x)$ 具有衰减阶 $(0, n+2)$, 则对所有的实数 ξ,

$$i^n \frac{d^n \hat{f}}{d\xi^n}(\xi) = [x^n f(x)]^\wedge(\xi). \tag{5}$$

特别, 等式 (5) 的两边存在!

定理 1 如果 $f(x)$ 是速减的, 则 $\hat{f}(\xi)$ 也是速减的. 更确切的, 对任意的 m, $n \geqslant 0$, 如果 $f(x)$ 具有衰减阶 $(m, n+2)$, 则 $\hat{f}(\xi)$ 具有衰减阶 (n, m).

证明 假设 $f(x)$ 具有衰减阶 $(m, n+2)$. 利用推论 1 和推论 2, 我们有 (对满足 $0 \leqslant \alpha \leqslant m$, $0 \leqslant \beta \leqslant n$ 的整数 α 和 β),

$$\begin{aligned} i^{\alpha+\beta}\xi^\alpha(\hat{f})^{(\beta)}(\xi) &= i^\alpha \xi^\alpha [x^\beta f(x)]^\wedge(\xi) = \left(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^\beta f(x)\right)^\wedge(\xi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^\beta f(x)\right) e^{-i\xi x} d'x. \end{aligned}$$

因此,

$$|\xi|^\alpha |(\hat{f}^{(\beta)}(\xi)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^\beta f(x)\right| d'x. \tag{6}$$

注意到 $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}(x^\beta f(x))$ 具形式 $Kx^b f(x)$ 的项的和, 其中 K 是常数, $0 \leqslant a \leqslant \alpha \leqslant m$ 以及 $0 \leqslant b \leqslant \beta \leqslant n$. 于是, 对某个常数 C 以及 $|x| \leqslant 1$,

$$\left|\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^\beta f(x)\right| \leqslant C|x|^n(|f(x)| + \cdots + |f^{(m)}(x)|) \leqslant \frac{CK|x|.}{|x|^{(n+2)}} = \frac{CK}{|x|^2}.$$

因此, (6) 中的积分是有限的, 且得到对某个适当的常数 A, 对所有满足 $0 \leqslant \alpha \leqslant m$ 和 $0 \leqslant \beta \leqslant n$ 的 α 和 β, $|(\hat{f})^{(\beta)}(\xi) \leqslant |A|\xi|^{-\alpha}$. 特别, 可取 $\alpha = m$, 并对 $\beta = 0, \cdots, n$ 的这些不等式相加, 得到

$$|\hat{f}(\xi)| + |(\hat{f})'(\xi)| + \cdots + |(\hat{f})^{(n)}(\xi)| \leqslant \frac{B}{|\xi|^m},$$

其中 B 是某个常数. 还得证明 $(\hat{f})^{(n)}(\xi)$ 是连续的, 即, 对任意 ξ_0, 需证明当

$\xi \to \xi_0$ 时, $(\hat{f})^{(n)}(\xi) \to (\hat{f})^{(n)}(\xi_0)$. 为此, 写出

$$\begin{aligned}|(\hat{f})^{(n)}(\xi) - (\hat{f})^{(n)}(\xi_0) &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |x|^n |f(x)||e^{-i\xi x} - e^{-i\xi_0 x}|d'x \\ &= (\int_{|x|>R} + \int_{|x|\leqslant R})|x|^n|f(x)||e^{-i\xi x} - e^{-i\xi_0 x}|d'x,\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $R \geqslant 1$ 是正常数. 由于 $|f(x)| \leqslant K|x|^{-n-2}$, $|x| \geqslant 1$, 所以当 $R \geqslant 1$ 时

$$\int_{|x|>R} |x|^n|f(x)||e^{-i\xi x} - e^{-i\xi_0 x}|d'x \leqslant 2\int_R^{\infty} Kx^{-2} \cdot 2d'x = \frac{4K}{R\sqrt{2\pi}},$$

通过取 R 足够大可使上式任意小. 一旦 R 取定, (7) 中的第二个积分通过取 ξ 充分靠近 ξ_0 就可任意小. □

注记 我们已经看到速减函数 $e^{-\frac{1}{2}ax^2}(a>0)$ 的 Fourier 变换是 $a^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}a\xi^2}$, 它也是速减的. 到目前所有已计算的其他例子中, $\hat{f}(\xi)$ 不是速减的是由于 $f(x)$ 不可导. 一般说来, $f'(x)$ 不存在 (即使是在一点不存在) 表明 $\hat{f}(\xi)$ 的退化. 例如, 在第 7.1 节的例 3 中, 我们求得 $e^{-a|x|}$ 的 Fourier 变换是 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{a^2+\xi^2}$, 对大的 ξ, 它 $\approx \sqrt{2/\pi}a\xi^{-2}$, 虽然当 $|x| \to \infty$ 时, 对任意整数 $n > 0$, $e^{-a|x|}$ 衰减得比 $|x|^{-n}$ 快. $e^{-a|x|}$ 在 $x=0$ 处不是 C^1 的事实是造成它的 Fourier 变换衰减性相对缓慢的原因. 注意到定理 1 粗略地表明 $f(x)$ 的光滑性支配当 $|\xi| \to \infty$ 时 $|\hat{f}(\xi)|$ 趋于零的速率, 反之, 当 $|x| \to \infty$ 时 $f(x)$ 的衰减率支配了 $\hat{f}(\xi)$ 的光滑性. □

例 2 求一个不是速减的函数 $f(x)$, 但对所有的 $|\xi| \geqslant 1$ 和 $m > 0$ 满足 $|\hat{f}(\xi)| \leqslant K_m|\xi|^{-m}$ (即$\hat{f}(\xi)$ 具有衰减阶 $(0,m)$, 对所有的 $m>0$).

解 定理 1 表明: 如果对所有的 $m \geqslant 0$, $f(x)$ 具有衰减阶 $(m,2)$(即 $f(x)$ 是 C^∞ 函数, 它的导数 [以及它本身] 当 $|x| \to \infty$ 时都至少衰减得与 $K|x|^{-2}$ 一样快), 则对所有的 $m \geqslant 0$, $\hat{f}(\xi)$ 具有衰减阶 $(0,m)$. 具有这些性质的一个函数是 $f(x) = (1+x^2)^{-1}$, 且它也不是速减的. 不必去计算 $\hat{f}(\xi)$ 来验证对所有的 $m>0$, 它具有衰减阶 $(0,m)$, 虽然在第 7.3 节的例 1 中的计算表明 $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\pi/2}e^{-|\xi|}$, 它确实具有衰减阶 $(0,m)$, 对所有的 $m>0$. □

注记 以下作为定理 1 的补充的漂亮结果是属于 Godfrey H. Hardy (1877—1947), 20 世纪最伟大的分析家之一. [G. H. Hardy, *A theorem concerning Fourier transforms*, J. London Math. Soc., 8(1933), 227~231.]

设 $f(x)$ 定义在 $(-\infty,\infty)$ 上. 假设对 $|x|\geqslant 1, |f(x)|\leqslant K_1|x|^n e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 和对 $|\xi|\geqslant 1$, $|\hat{f}(\xi)|\leqslant K_2|\xi|^n e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$, 其中 n 是非负整数, K_1 和 K_2 是正常数. 则 $f(x)=p(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$, 其中 $p(x)$ 是次数不超过 n 的多项式. □

卷积以及它们的 Fourier 变换

常希望求一个函数 $h(x)$, 它的 Fourier 变换是两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的 Fourier 变换的乘积 $\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$. 一般 $h(x)$ 不会是 $f(x)g(x)$. 为了求函数 $h(x)$, 来做以下计算, 为了使交换积分次序 (参看附录 2) 是正当的, 以及确保所有出现的积分存在, 假设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 具有衰减阶 $(0,2)$:

$$\begin{aligned}\hat{h}(\xi)&=\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)=\Big(\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}d'x\Big)\Big(\int_{-\infty}^{\infty}g(y)e^{-i\xi y}d'y\Big)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(y)e^{-i\xi(x+y)}d'xd'y=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y)g(y)e^{-i\xi z}d'yd'z\\&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi z}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y)g(y)d'y\Big)d'z.\end{aligned}$$

用 x 替换过渡性的积分变量 z, 可见最后的积分是以下函数的 Fourier 变换

$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)d'y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dy,$$

此为函数 $f(x)$ 的平移 $f(x-y)$ 关于 “权”$g(y)$ 的连续叠加.

定义 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**卷积**是由以下定义的函数 $f*g$

$$(f*g)(x)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dy, \tag{8}$$

如果对每个 x 积分存在的话 (例如, 如果 f 有界以及 g 是绝对可积).

因此上面的计算表明, 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 具有衰减阶 $(0,2)$, 则具 Fourier 变换 $\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$ 的函数是 $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}(f*g)(x)$. 事实上, 如果仅假设 f 和 g 是分段连续的且对某个常数 K, 有 $|f(x)|$, $|g(x)|\leqslant K|x|^{-2}$, 则上述计算仍然有效. 于是有下面

的结果.

定理 2(卷积定理) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是分段连续的, 且对 $|x|\geqslant 1$ 有 $|f(x)|\leqslant \frac{K}{|x|^2}$ 和 $|g(x)|\leqslant \frac{K}{|x|^2}$. 则

$$\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f*g)^{\wedge}(\xi). \tag{9}$$

为了举例说明该结果的用处以及激发将在第 7.3 节引出的反演定理, 我们给出下面来自常微分方程的简单例子. 更多涉及偏微的例子将在第 7.4 节和第 7.5 节给出.

例 3 对给定的常数 k 和连续函数 $f(x)$, 考虑常微

$$\frac{dy}{dx}+ky=f(x). \tag{10}$$

由形式上对 (10) 两边取 Fourier 变换来求该常微的解.

解 从第 1.1 节得知该问题的通解是

$$y=e^{-kx}\int_a^x e^{kt}f(t)dt+ce^{-kx}, \tag{11}$$

其中 a 和 c 是任意常数. 就该常微而言利用 Fourier 变换技巧没有便利, 但在这熟悉的背景来看这种技巧看起来像什么, 是有启发性的. 为了对常微 (10) 的两边取 Fourier 变换, 假设解 $y(x)$ 存在且具衰减阶 $(1,2)$. 还假设 $\hat{f}(\xi)$ 存在. 对 (10) 的两边取 Fourier 变换并利用命题 1, 得

$$i\xi\hat{y}(\xi)+k\hat{y}(\xi)\hat{f}(\xi)\quad 或\quad \hat{y}(\xi)=\frac{\hat{f}(\xi)}{k+i\xi}.$$

实际上, 常常不知道上述假设是否成立. 因此, 得到下面最终的结果之后, 为了确保它是存在的并满足 (10), 就必须验证. 不管怎样, 从第 7.1 节例 3 的解答可见: 如果

$$g(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ e^{-kx}, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

则

$$\hat{g}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(k+i\xi)}.$$

(只要忽略第 7.1 节例 3 中的第二个积分). 因此, 由定理 2, 得

$$\hat{y}(\xi) = \sqrt{2\pi}\hat{g}(\xi)\hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(g * f)\hat{\ }(\xi) = (g * f)\hat{\ }(\xi).$$

这要求假设 $f(x)$ 是分段连续的, 且满足 $|f(x)| \leqslant k|x|^{-2}$, 但不管怎样, 要检验我们的答案. 为了得出 $y = f * g$, 我们需要反演定理和更多的假设. 然而, 我们已经得到推测性的解

$$\begin{aligned} y(x) &= (g * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-t)f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} e^{-k(x-t)}f(t)dt \\ &= e^{-kx}\int_{-\infty}^{x} e^{kt}f(t)dt. \end{aligned}$$

现只要 $\int_{-\infty}^{x} e^{kt}f(t)dt$ 存在 $y(x)$ 就存在. 例如, 如果对某个 $k' < k$, 对所有的 $t < 0$ 有 $|f(t)| \leqslant$ 常数. $e^{-k't}$ 就是这种情形. 则由乘积法则, 得

$$y'(x) = -ke^{-kx}\int_{-\infty}^{x} e^{kt}f(t)dt + e^{-kx}e^{kx}f(x),$$

于是 $y'(x) = ky(x) = f(x)$, 即, 在关于 $f(x)$ 的适当的假设下, 推测性的解是实际上的解. 更精确地说, 我们已经证明:

> 如果 $f(x)$ 是连续的, 且对某个实数 A, $\int_{-\infty}^{A} e^{kt}|f(t)|dt$ 存在, 则
>
> $$y(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-k(x-t)}f(t)dt, \qquad -\infty < x < \infty, \tag{12}$$
>
> 是 $y' + ky = f(x)$ 的解.

显然 (12) 中的 $y(x)$ 不是 (10) 的唯一解; 所有其他的解可由加上相应的齐次方程的解 Ce^{-kx} 得到. 这说明这样一个事实: 由 Fourier 变换方法给出的推测性解通常不是最一般的解. 原因是 Fourier 变换方法预先假定解具有某种衰减率. 把 Ce^{-kx} 添加到 $y(x)$ 会破坏 $y(x)$ 原先已具备的任一衰减性质, 因为如果 $k > 0$, 则当 $x \to -\infty$ 时 $e^{-kx} \to \infty$. 然而, 在应用中, 往往需要在某种意义下衰减的解. 如果存在这样的解, Fourier 变换方法将很可能提供这些解而不是任一无关的不衰减的解, 例如, 如果 $f(x)$ 是连续的且在一有限区间外为零, 则 (12) 是 (10) 唯一的有界解 (即, $|y(x)| <$ 常数). 另一方面, 如果不小心, 如果用 (11) 的话, 解 (12) 可能会漏掉. □

例 4 令 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的速减函数, 令

$$F(\xi)=2\int_0^\infty f(x)\cos(\xi x)d'x.$$

[这是 $f(x)$ 限制在 $(0,\infty)$ 上的 "Fourier 余弦变换"(参看第 7.5 节).] 证明: 如果 $F(\xi)$ 的图像在离开 $\xi=0$ 任意远处穿过 ξ–轴, 则所有奇数阶导数 $f^{(2k+1)}(0)$ 等于零. 特别, 如果

$$f(x)=\sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

(即, 如果 $f(x)$ 用它的 Taylor 级数给出), 则 $f(x)$ 必是偶函数.

解 通过反复利用 Green 公式 (或通过两次分部积分), 得

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\pi}{2}}F(\xi) &= \int_0^\infty f(x)\cos(\xi x)dx\\ &=-\frac{1}{\xi^2}\Big([-f(x)\xi\sin(\xi x)-f'(x)\cos(\xi x)]\Big|_0^\infty+\int_0^\infty f''(x)\cos(\xi x)dx\Big)\\ &=-\frac{1}{\xi^2}f'(0)-\frac{1}{\xi^2}\int_0^\infty f''(x)\cos(\xi x)dx\\ &=-\frac{1}{\xi^2}f'(0)-\frac{1}{\xi^2}\Big(-\frac{1}{\xi^2}f^{(3)}(0)-\frac{1}{\xi^2}\int_0^\infty f^{(4)}(x)\cos(\xi x)dx\Big)\\ &=\cdots=\sum_{k=0}^p\Big(\frac{(-1)^{k+1}}{\xi^{2k+2}}f^{(2k+1)}(0)\Big)-\frac{(-1)^p}{\xi^{2p+2}}\int_0^\infty f^{(2p+2)}(x)\cos(\xi x)dx.\end{aligned}$$

为了导出矛盾, 假设 $f^{(2p-1)}(0)$ 是第一个不为零的奇数阶导数. 则上式成为

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\pi}{2}}F(\xi)= &\ \frac{(-1)^p}{\xi^{2p}}f^{(2p-1)}(0)\\ &+\frac{(-1)^{p+1}}{\xi^{2p+2}}\Big(f^{(2p+1)}(0)+\int_0^\infty f^{(2p+2)}(x)\cos(\xi x)dx\Big).\end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 是速减的, 所以大圆括号中的项是 ξ 的有界函数. 因此,

$$\lim_{|\xi|\to\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\xi^{2p}F(\xi)=(-1)^pf^{(2p-1)}(0)\neq 0.$$

然而, 由于假设当 $|\xi|$ 趋于 ∞ 的过程中有无穷多个 ξ 的值使 $F(\xi)=0$, 所以该极限 (如果存在的话) 必为零. □

例 5 令 $f(x)$ 是偶的, 绝对可积函数, 对于 $x>0$ 是 C^2, 且满足 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$. 假设 $f'(0^+)$ 存在且对 $x>0$ 有 $f''(x)\geqslant 0$(例如, 一个合适的选取是 $f(x)=e^{-|x|}$). 证明 $\hat{f}(\xi)\geqslant 0$.

解 由于 $f(x)$ 是偶的和绝对可积的, 所以有

$$\hat{f}(\xi)=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)e^{-i\xi x}d'x=2\lim_{R\to\infty}\int_{\frac{1}{R}}^{R} f(x)\cos(\xi x)d'x. \tag{13}$$

由 Green 公式, $f''(x)\cos(\xi x)\leqslant f''(x)$ 的事实以及微积分基本定理, 得

$$\begin{aligned}
&-\xi^2\lim_{R\to\infty}\int_{\frac{1}{R}}^{R} f(x)\cos(\xi x)dx=\lim_{R\to\infty}\int_{\frac{1}{R}}^{R}\frac{d^2}{dx^2}(\cos(\xi x))f(x)dx\\
&=\lim_{R\to\infty}\Big((-f(x)\sin(\xi x)\xi-f'(x)\cos(\xi x))\Big|_{\frac{1}{R}}^{R}+\int_{\frac{1}{R}}^{R} f''(x)\cos(\xi x)dx\Big)\\
&\leqslant f'(0^+)+\lim_{R\to\infty}\int_{\frac{1}{R}}^{R} f''(x)dx=f'(0^+)+\lim_{R\to\infty}\big(f'(R)-f'(\tfrac{1}{R})\big)\\
&=f'(0^+)-f'(0^+)=0.
\end{aligned}\tag{14}$$

由 (13) 和 (14), 对 $\xi\neq 0$, 有 $\hat{f}(\xi)\geqslant 0$. 另外, 由控制收敛定理的连续形式 (参看附录 3 中的 (4′)), 得 $\hat{f}(0)=\lim_{\xi\to 0}\hat{f}(\xi)\geqslant 0$. 作为另一种证法, 由于对 $x>0$ 有 $f''(x)\geqslant 0$ 以及 $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$, 所以对 $x>0$ 有 $f'(x)\leqslant 0$. 则对 $x>0$, $f(x)=\lim_{R\to\infty}\int_x^R -f'(t)dt\geqslant 0$, 由于 $f(x)$ 是偶的, 所以对所有 $x\neq 0$, 有 $f(x)\geqslant 0$. 于是 $\hat{f}(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)d'x\geqslant 0$. □

注记 满足 $\int_{-\infty}^{\infty}\rho(\xi)d\xi=1$ 的函数 $\rho(\xi)\geqslant 0$ 称为**概率密度**. 在概率论中, 函数 $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\rho(\xi)e^{ix\xi}d\xi$ 称为 $\rho(\xi)$ 的**特征函数**. 函数 $f(x)$ 是一概率密度的特征函数的必要条件是 $f(0)=1$. 在例 5 中关于 $f(x)$ 的条件连同 $f(0)=1$ 确保 $f(x)$ 是某个概率密度的特征函数. 由第 7.3 节中的反演定理, 概率密度是 $\hat{f}(\xi)/\sqrt{2\pi}$. 特别, $f(x)=e^{-|x|}$ 是 Cauchy 概率密度 $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\xi^2}$ 的特征函数. □

概要 7.2

1. 衰减阶: 一函数 $f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ 称为具有**衰减阶**(m,n), 其中 m 和 n 是非负整数, 如果 $f(x)$ 是 C^m 且存在常数 K, 使得对所有满足 $|x|\geqslant 1$ 的 x, 有

$$|f(x)|+|f'(x)|+\cdots+|f^{(m)}(x)|\leqslant\frac{K}{|x|^n}. \tag{S1}$$

对所有的 $m,\ n \geqslant 0$, 具有衰减阶 (m,n) 的函数称为**速减的**. 定理 1 表明, 对任意的 $m,\ n \geqslant 0$, 如果 $f(x)$ 具有衰减阶 $(m,n+2)$, 则 $\hat{f}(\xi)$ 具有衰减阶 (n,m). 特别, 速减的函数的 Fourier 变换也是速减的.

2. Fourier 变换的性质: $\hat{f}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx$. 这里我们列出在该节建立的性质并指出在哪里有关于它们确切条件的叙述. (对条目 E, 见第 7.1 节的例 6.)

A. $\left(\frac{df}{dx}\right)^\wedge(\xi)=i\xi\hat{f}(\xi)$ (命题 1)

B. $[f^{(m)}(x)]^\wedge(\xi)=i^m\xi^m\hat{f}(\xi)$ (推论 1)

C. $i\frac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi)=[xf(x)]^\wedge(\xi)$ (命题 2)

D. $i^n\frac{d^n\hat{f}}{d\xi^n}(\xi)=[x^nf(x)]^\wedge(\xi)$ (推论 2)

E. $(e^{-\frac{1}{2}ax^2})^\wedge(\xi)=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{1}{2}a^{-1}\xi^2}$ $(a>0)$

F. $\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f*g)^\wedge(\xi)$ (定理 2),

其中 $(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dy$ 是 f 和 g 的**卷积**. 更完全的 Fourier 变换性质以及特殊的 Fourier 变换表在附录 5 给出.

练习 7.2

1. 证明: 如果 $f(x)$ 是在 $(-\infty,\infty)$ 上绝对可积, 则

(a) $[e^{ibx}f(ax)]^\wedge(\xi)=\frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\xi-b}{a})$, $a,\ b$ 是实数, $a\neq 0$

(b) $[f(\frac{x+b}{a})]^\wedge(\xi)=ae^{ib\xi}\hat{f}(a\xi)$, $a,\ b$ 是实数, $a\neq 0$.

2. 利用第 7.1 节例 6 的结果和推论 2 来求以下每个函数的 Fourier 变换:

(a) $f(x)=x^2e^{-\frac{1}{2}x^2}$　　(b) $g(x)=x^4e^{-\frac{1}{2}ax^2}$, $a>0$.

3. 证明: 如果 $f(x)$ 对所有的 x 有定义且具有衰减阶 $(2,4)$(即 f 是 C^2 的且对某个常数 $K>0$, 有 $|f(x)|+|f'(x)|+|f''(x)|\leqslant K|x|^{-4}$, $|x|\geqslant 1$), 则

$$[f''(x)-x^2f(x)]^\wedge(\xi)=\hat{f}''(\xi)-\xi^2\hat{f}(\xi).$$

4. 证明: 如果 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,\infty)$ 上, 且具有衰减阶 $(m,2)$, $m\geqslant 1$, 则 $f'(x)$ 具有衰减阶 $(m-1,2)$.

5. 如果 $f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ 具有衰减阶 (m,n), 则 $f(x)$ 也具有衰减阶 (m',n'), 其中 $0\leqslant m'\leqslant m$ 和 $0\leqslant n'\leqslant n$.

6. 证明: 如果 $f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ 具有衰减阶 $(0,n+2)$, 则对所有的实数 ξ, 有

$$i^n\frac{d^n}{d\xi^n}\hat{f}(\xi)=[x^nf(x)]^\wedge(\xi).$$

7. 求以下函数的 Fourier 变换

$$f(x)=\begin{cases}x^2e^{-x}, & 如果 \quad x\geqslant 0\\ 0, & 如果 \quad x<0.\end{cases}$$

8. 考虑正文中的例 3, 其中 $k=-1$ 和 $f(x)\equiv 1$. 则要解的问题是很简单的常微 $y'(x)-y(x)=1$. 用 Fourier 变换可能求得该常微的解吗?

提示　参看等式 (11) 后面的评注.

9. 证明: 如果 $p_m(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$, $a_m\neq 0, m\geqslant 1$, 是 m 次多项式, 则对某个正常数 d_m, 对 $|x|\geqslant 1$ 有 $|p_m(x)|\leqslant d_m|x|^m$.

10. (a) 对常微 $y''(x)-y(x)=f(x)$, 证明 Fourier 变换和卷积定理的形式运用得到形式解 $y(x)=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x-z|}f(z)dz$.

提示　由第 7.1 节的例 3, 得 $e^{-|x|}$ 的 Fourier 变换是 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}2(1+\xi^2)^{-1}$.

(b) 通过记

$$y(x)=\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{x}e^{y-x}f(y)dy+\int_{x}^{\infty}e^{x-y}f(y)dy\right)$$

以及运用 Leibniz 法则的一般形式 (参看附录 3), 证明: 如果 $f(x)$ 是连续的和绝对可积的或是有界的, 则该形式解是有效的.

11. 对以下情形验证卷积定理:

(a)　$f(x)=g(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}$　　　(b)　$f(x)=g(x)=\begin{cases}1, & 对 \ |x|\leqslant 1,\\ 0 & 对 \ |x|>1.\end{cases}$

提示　(对 (b)). 先证明 $(f*g)(x)=\begin{cases}0, & 对 \ |x|>2,\\ 2-|x|, & 对 \ |x|\leqslant 2.\end{cases}$

12. 令 $f(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$ 是速减函数, 且 α 是常数. 证明

(a)$f*(\alpha g)=(\alpha f)*g=\alpha(f*g)$　(b)$f*(g+h)=(f*g)+(f*h)$　(c)$f*g=g*f$.

13. (a) 在第 7.1 节例 6 的计算中, 我们得到 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}ax^2}dx=\sqrt{2\pi/a}$. 取 $a=2b$, 得 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-bx^2}dx=\sqrt{\pi/b}$. 对该公式关于 b 求导 n 次得到:

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^{2n}e^{-bx^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{\sqrt{b}(4b)^n n!}.$$

(b) 证明: 对 $m=0,1,2,\cdots$, $f_m(x)=x^me^{-\frac{1}{2}x^2}$ 是速减函数.

(c) 回忆起 $\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{g(x)}dx$, 证明 (利用 (a) 对 $b=1$ 的结果)

$$\langle f_m,f_n\rangle=\begin{cases}\frac{\sqrt{\pi}(m+n)!}{2^{m+n}(\frac{m+n}{2})!}, & 如果 \ m+n \ 是偶数,\\ 0, & 如果 \ m+n \ 是奇数.\end{cases}$$

14. (a) 由习题 13 的 (c) 部分得知 f_0, f_1, $f_2, \cdots$ 不是两两正交的 (例如, $\langle f_0, f_2\rangle \neq 0$). 求常数 c, 使得 $(x^2+c)e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 跟 f_0 和 f_1 正交.

(b) 令 V_{n+1} 是所有 f_0, $f_1, \cdots, f_n$ 的线性组合的集合. 因为 V_n 是 $n+1$ 维空间 V_{n+1} 的 n 维子空间, 所以应该确实存在一个形如 $f_n + a_{n-1}f_{n-1} + \cdots + a_0 f_0$ 的函数, 它与 f_0, f_1, $\cdots, f_{n-1}$ 正交 (因此与 V_n 中所有函数正交). 利用分部积分证明该函数为

$$k_n(x) = (-\frac{1}{2})^n e^{\frac{1}{2}x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

计算 $k_1(x)$, $k_2(x)$ 和 $k_3(x)$. 注意到因子 $(-\frac{1}{2})^n$ 确保 $k_n(x)$ 具有形式 $p_n(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$, 其中 $p_n(x)$ 是首一 n 次多项式 (即 x^n 的系数是壹).

(c) 利用 (b) 部分证明函数 $k_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ 是两两正交的. 并证明 $\|k_n\|^2 = \langle f_n, k_n\rangle = 2^{-n}n!\sqrt{\pi}$.

(d) (i) 验证 $k_n'(x) = xk_n(x) - 2k_{n+1}(x)$(即, $k_{n+1}(x) = \frac{1}{2}[xk_n(x) - k_n'(x)]$).

(ii) 还验证 $xk_n(x) + k_n'(x) = nk_{n-1}(x)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$(其中 $0k_{-1}(x) \equiv 0$).

提示 对 (ii), 证明 $xk_n(x) + k_n'(x) = p_n'(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$, 其中 $k_n(x) = p_n(x)e^{\frac{1}{2}x^2}$ 如同在 (b) 部分. 然后利用分部积分证明 $xk_n(x) + k_n'(x)$ 与 $f_m(x)$, $m = 0, \cdots, n-2$ 正交. 从 (b) 部分得出 $xk_n(x) + k_n'(x)$ 与 $k_{n-1}(x)$ 成比例.

(e) 利用 (d) 部分的 (i) 以及命题 1 和命题 2, 验证 $\hat{k}_{n+1}(\xi) = \frac{i}{2}[\hat{k}_n'(\xi) - \xi\hat{k}_n(\xi)]$, 于是有 $i^{n+1}\hat{k}_{n+1}(\xi) = \frac{1}{2}[i^n\hat{k}_n'(\xi) - i^n\xi\hat{k}_n(\xi)]$.

(f) 因为由第 7.1 节的例 6, $\hat{k_0}(\xi) = e^{\frac{1}{2}\xi^2} = k_0(\xi)$, 且由于函数列 $i^n\hat{k}_n(\xi)$ 和 $\hat{k}_n(\xi)$ 满足相同的递推公式 [见 (d) 和 (e)], 所以得出 $k_n(\xi) = i^n\hat{k}_n(\xi)$ 或等价地, $\hat{k}_n(\xi) = (-i)^n k_n(\xi)$. 特别, k_0, k_4, $k_8, \cdots$ 与它们的 Fourier 变换相等. 用线性代数的术语来说,Hermite 函数是 Fourier 变换具特征值 $1, i, -1, -i, \cdots$ 的特征向量.

注记 函数 $k_n(x)$ 与 **Hermite函数**成比例, 而 $p_n(x)$ 与 **Hermite特征多项式** 成比例. 这些函数出现在量子力学调和振荡子的研究中, 在第 8.5 节将来研究它们 (也可参看下面的习题 16). 由下一个习题和反演定理 (参看第 7.3 节) 得到: 在没有非零的衰减阶为 $(0,2)$ 的函数与所有 Hermite 函数正交的意义下, Hermite 函数所成由衰减阶为 $(0,2)$ 的函数所成的空间中的一个完全正交函数族.

15. 设 $f(x)$ 是衰减阶为 $(0,2)$ 的函数, $h(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$. 证明下面计算的正当性, 并利用卷积定理推断: 如果 $f(x)$ 与所有形如 $x^n e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 的函数(或等价地, $k_n(x)$) 正交, 则 $\hat{f}(\xi) \equiv 0$.

$$\begin{aligned}(f*h)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-\frac{1}{2}(x-y)^2}dy = e^{-\frac{1}{2}x^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f(y)\frac{x^n y^n}{n!}e^{-\frac{1}{2}y^2}\right)dy \\ &= e^{-\frac{1}{2}x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)y^n e^{-\frac{1}{2}y^2}dy\right).\end{aligned}$$

提示　为了证明求和与积分可交换次序, 只要 (参看附录 3 中的控制收敛定理) 找出一个函数 $g(y)$, 使得

$$\sum_{n=0}^{\infty}|f(y)|\frac{x^n y^n}{n!}e^{-\frac{1}{2}y^2}\leqslant g(y)$$

和 $\int_{-\infty}^{\infty}g(y)dy<\infty$. 由于 $|f(y)|\leqslant M$, 故

$$\sum_{n=0}^{\infty}|f(y)|\frac{x^n y^n}{n!}e^{-\frac{1}{2}y^2}\leqslant M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n y^n}{n!}e^{-\frac{1}{2}y^2}=Me^{xy-\frac{1}{2}y^2},$$

对每个固定的 x, 它关于 y 的积分是有限的 (为什么?).

16. 令 H 是由以下定义的微分算子

$$[Hf](x)=\frac{1}{2}(-f''(x)+x^2f(x)).$$

在量子力学中 (参看第 8.5 节), H 本质上是调和振荡子的能量算子. H 的特征值是那些使得 Schrödinger 方程 $Hf=\lambda f$ 对某个非零函数 f(称为 H 的特征函数, 参看第 4.4 节) 成立的常数 λ.

(a) 从 H 的特殊形式验证: 对任意速减函数 f, 有 $[Hf]^\wedge(\xi)=\frac{1}{2}\left(-\hat{f}''(\xi)+\xi^2\hat{f}(\xi)\right)=[H(\hat{f})](\xi)$. 推断如果 f 是 H 的特征函数, 则 $\hat{f}$ 也是 H 的具相同特征值的特征函数.

(b) 验证习题 14(b) 中定义的函数 $k_n(x)$ 是 H 的特征值为 $n+\frac{1}{2}$ 的特征函数.(以适当的单位下, 这些特征值表示量子力学振荡子的能级).

提示　先证明对任意 C^2 函数 $f(x)$, 有

$$\frac{1}{2}(-f''(x)+x^2f(x))=\frac{1}{2}(-\frac{d}{dx}+x)(\frac{d}{dx}+x)[f(x)]+\frac{1}{2}f(x).$$

考虑 $f(x)=k_n(x)$, 并利用习题 14 的 (d) 部分的 (i) 和 (ii).

(c) 验证对任意形如 $q_n(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $H[q_n(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}]$ 是相同形式的其他函数, 其中 $q_n(x)$ 是次数为 n 的多项式.

注记　从 (c) 部分的结论, 也许可猜测 Hermite 函数 $k_n(x)$ 是 H 的特征函数 (参看习题 14(f)). 的确, 对熟悉线性代数的读者来说, H 是习题 14(b) 中的 V_{n+1} 上的对称算子 (由 Green 公式), 且 H 保持 V_n 不变. 由此得到 V_{n+1} 中的任意向量与 V_n 正交. (比如, $k_n(x)$ 经 H 必映到自身的一个非零常数倍 (即, $k_n(x)$ 必是 H 的特征函数).

17. 令

$$H_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!}e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

注意到 $H_n(x)$ 是习题 14(b) 中的多项式 $p_n(x)$ 的非零常数倍, 即 $H_n(x)$ 与一个 Hermite 多项式成比例. 令 z 是另一个变量并令 D 表示算子 $\frac{d}{dx}$.

(a) 证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)z^n=e^{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D^n(e^{-x^2})}{n!}(-z)^n=e^{x^2}e^{-(x-z)^2}=e^{2xz-z^2}.$$

(b) 由以下定义 $u(x,t,z)$ 和 $K_n(x,t)$:

$$u(x,t,z)=e^{2xz+tz^2}=\sum_{n=0}^{\infty}K_n(x,t)z^n.$$

证明 $K_n(x,t)$ 满足热方程 $v_t=\frac{1}{4}v_{xx}$.

提示 对每个 z, 函数 $u(x,t,z)=e^{2xz+tz^2}$ 满足该热方程. 对 $v_t=\frac{1}{4}v_{xx}$ 两边关于 z 求导 n 次, 并求在 $z=0$ 的结果.

注记 注意到 $K_n(x,-1)=H_n(x)$, 而 $K_n(x,0)=2^n x^n/n!$. 因此, 很奇妙地, 后退一个时间单位单项式转化成 Hermite 多项式.

18. (**Poisson求和公式**). 令 $f(x)$ 是任一分段连续的函数, 对每个 x, $-\infty<x<\infty$, 有定义, 使得和 $F(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(x+2kL)$ 收敛 (绝对收敛) 到一连续和分段 C^1 的函数 $F(x)$. 假设这种收敛关于 $-L\leqslant x\leqslant L$ 是一致的.

(a) 证明 $F(x)$ 是周期为 $2L$ 的周期函数, 且跟它的 Fourier 级数相等.

(b) 在 $F(x)$ 的复 Fourier 级数中令 $x=0$, 得到 Poisson 求和公式:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(2kL)=F(0)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m=\frac{\sqrt{2\pi}}{2L}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{f}(\frac{m\pi}{L}). \qquad (*)$$

特别关注最后的等式.

(c) 证明: 如果 $f(x)$ 具有衰减阶 $(1,2)$(即 $f(x)$ 是 C^1 的, 且对某个 K, 对所有的 $|x|\geqslant 1$, 有 $|f(x)|+|f'(x)|\leqslant K|x|^{-2}$), 则关于 $f(x)$ 的假设都满足.

19. 由形式运用习题 18 的公式 $(*)$, 来求以下无穷级数的简单表达式:

(a) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(am)}{m}$ (b) $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(am)}{m}\right)^2$ (c) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{a^2+m^2}$ $(a\neq 0)$.

20. (a) 通过在习题 18 的 $(*)$ 中取 $f(x)=(4\pi t)^{-\frac{1}{2}}e^{-x^2/4t}$, $t>0$, 证明

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-L^2k^2/t}=\frac{1}{2L}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-tm^2\pi^2/L^2}. \qquad (**)$$

著名的 **Jacobi theta函数**是由 $\theta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2 t}$ 定义. 由在 $(**)$ 中取 $L=\sqrt{\pi}$ 来验证 $\theta(\frac{1}{t})=\sqrt{t}\theta(t)$.

(b) 令

$$\omega(t)=\frac{1}{4}e^t\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2 e^{4t}}.$$

利用 (a) 部分的结果证明重要的事实: $\omega(t)$ 是 t 的偶函数.

注记 令 $\Phi(t)=\omega''(t)-\omega(t)$. 则由 (b) 部分, $\Phi(t)$ 也是偶函数. 数学中最著名的公开问题之一是所谓的 **Reimann假设**, 它等价于断言: $\Phi(t)$ 的 Fourier 余弦变换, 即

$$F(x)=\int_0^{\infty}\Phi(t)\cos(xt)dt,$$

只有实零点. 著名德国数学家 Georg Friedrich Bernhard Riemann(1826—1866) 1859 年在他的 8 页划时代的题为 *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*("关于小于一给定数值的素数的个数") 论文中叙述了该猜测 (也可参看 [H.M.Edwards, 1974], [G.Pólya, 1974]).

21. (a) 利用 Fubini 定理 (参看附录 2) 证明两个绝对可积的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的卷积 $(f*g)(x)$ 也是绝对可积的, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty}|(f*g)(x)|dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)g(y)|dydx < \infty.$$

(b) 由 (a) 部分以及卷积定理推断: 两个绝对可积函数的 Fourier 变换的乘积也是一个绝对可积函数的 Fourier 变换. 可以利用事实: 卷积定理对任意两个绝对可积函数成立.
(c) 由 (b) 部分推断: 如果 $p(z)$ 是满足 $p(0)=0$ 的任意多项式, 则 $p(\hat{f}(\xi))$ 是一绝对可积的函数 Fourier 变换, 只要 $f(x)$ 是绝对可积的.
(d) 为什么在 (c) 部分中条件 $p(0)=0$ 是必要的?

提示 对任意绝对可积函数 $h(x)$, 由第 7.1 节的习题 10(c), 有

$$\lim_{\xi\to\pm\infty}|\hat{h}(\xi)|=0.$$

§7.3 反演定理和 Parseval 等式

既在应用中 (参看在第 7.1 节前的注记) 也在纯数学中的 Fourier 变换的一个基本性质是: 对 f 和 g 较弱的假设下, 如果 $\hat{f}(\xi)=\hat{g}(\xi)$, 则 $f(x)=g(x)$. 换言之, 我们可由 $f(x)$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}(\xi)$ 来重新获得适当的函数 $f(x)$. 在本章的末尾 (补充) 我们证明:

反演定理 设 $f(x)$ 是分段 C^1 函数 (即 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在任意有限区间内分段连续的), 使得 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$. 则对每个实数 x, 有

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi. \qquad (1)$$

特别, 如果还假设 $f(x)$ 是连续的, 则 $f(x)$ 通过反演公式 (1) 由 $\hat{f}(\xi)$ 确定. (1) 的右边看起来很像 $\hat{f}(\xi)$ 的 Fourier 变换, 只是在 $i\xi x$ 前没有负号. 由于该积

分实质上还原成 $f(x)$, 所以右边是 $\hat{f}(\xi)$ 的逆 Fourier 变换. 更精确地, 有

定义 函数 $g(\xi)$ 的**逆 Fourier 变换** $\check{g}(x)$ 由以下定义

$$\check{g}(x)=\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{i\xi x}d'\xi=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} g(\xi)e^{i\xi x}d'\xi,$$

只要该极限存在, 其中 $d'\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}d\xi$.

对一个连续的分段 C^1 函数 $f(x)$, 且 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$, 反演定理简单表明 $[\hat{f}(\xi)]^{\vee}(x)=f(x)$.

注记 一个绝对可积函数的 Fourier 变换不必是绝对可积的. 的确, 由第 7.1 节的例 4 ($L=1$) 得知, 下面的绝对可积函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{如果}\quad |x|\leqslant 1,\\ 0, & \text{如果}\quad |x|>1,\end{cases}$$

的 Fourier 变换是 $\hat{f}(\xi)=\frac{2\sin\xi}{\xi}$. 可证 (参看习题 4) $\hat{f}(\xi)$ 不是绝对可积的. 由于这个缘故, 反演定理中的积分 (1) 是视为 Cauchy 主值的, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d'\xi=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi. \qquad \square$$

例 1 计算 $g(\xi)=\frac{1}{a^2+\xi^2}$ $(a>0)$ 的逆 Fourier 变换.

解 如果要直接计算, 那就需要计算积分

$$\check{g}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\xi x}}{a^2+\xi^2}d'\xi.$$

虽然利用复围线积分计算它不难, 但我们利用反演定理来进行间接计算. 由第 7.1 节的例 3 得知 Fourier 变换是 $g(\xi)$ 的函数为 $g(x)=\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}e^{-a|x|}$. 因此, 由反演定理立刻得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\xi x}}{a^2+\xi^2}d'\xi=\check{g}(x)=\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}e^{-a|x|}. \qquad \square(2)$$

注记 假设在 (2) 中作变量变换 $\xi\to x$ 和 $x\to-\xi$. 则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\xi x}}{a^2+x^2}d'x=\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}e^{-a|\xi|}. \qquad (2')$$

因此, 我们也求出 $\frac{1}{a^2+x^2}$ 的 Fourier 变换! 相同的论证表明, 一般有 $\hat{g}(\xi)=\check{g}(-\xi)$. 的确, 我们有

$$\hat{g}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-i\xi x}d'x=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{i(-\xi)x}d'x=\check{g}(-\xi). \tag{3}$$

换言之, 一个函数的 Fourier 变换的图像正好是该函数的逆 Fourier 变换的图像在垂直坐标轴上的反射. 对适当的函数 f, 令 $g=\hat{f}$, 根据反演定理, 由 (3) 得到 $(\hat{f})^{\wedge}(\xi)=(\hat{f})^{\vee}(-\xi)=f(-\xi)$(即, 对一个函数施行两次 Fourier 变换具有反射该函数的图像的效果). 施行四次 Fourier 变换将重新回到原函数 (即 $f^{\wedge\wedge\wedge\wedge}=f$; 为什么?). □

Fourier 变换与复 Fourier 级数的关系

反演公式与 Fourier 级数的收敛结果 (参看第 4.2 节) 相象. 的确, 当 $f(x)$ 是 C^2 且在一个有限区间之外为零时, 可用复 Fourier 级数来证明反演公式 (1). 为此, 令 $f_L(x)$ 是 f 限制在区间 $[-L,L]$ 上的函数. 对任意数 x_0, 取 L 如此大, 使得 $-L<x_0<L$, 且对 $|x|>L$, $f(x)=0$. 由第 4.2 节定理 2 的复 Fourier 级数形式, 得

$$f(x_0)=f_L(x_0)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m e^{im\pi x_0/L},\quad 其中\quad c_m=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f_L(x)e^{-im\pi x/L}dx.$$

由于在 $[-L,L]$ 内 $f=f_L$ 以及在 $[-L,L]$ 之外 $f=0$, 故有

$$c_m=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-im\pi x/L}dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{2L}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-im\pi x/L}d'x=\frac{\sqrt{2\pi}}{2L}\hat{f}(\frac{m\pi}{L}). \tag{4}$$

因此,

$$f(x_0)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{2\pi}}{2L}\hat{f}(\frac{m\pi}{L})e^{im\pi x_0/L}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{f}(\frac{m\pi}{L})e^{im\pi x_0/L}\cdot\frac{\pi}{L}. \tag{5}$$

因为 (5) 的最左端是与 L 无关的常数, 故最右端的和也必是与 L 无关. 然而, 该和是以下积分的 Riemann 和

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x_0}d'\xi, \tag{6}$$

其中划分的区间具有长度 $\triangle\xi=\pi/L$. 在 f 是 C^2 的假设之下, 由第 7.2 节的定理 1 得知 $\hat{f}(\xi)$ 是连续的 (的确, 是 C^∞ 的) 且对 $|\xi|\geqslant 1$ 有 $|\hat{f}(\xi)|\leqslant C|\xi|^{-2}$. 因

此, (6) 存在且 Riemann 和 (5) 当 L 趋于无穷时 (即, 当 $\triangle\xi \to 0$ 时) 趋于 (6). 然而, 我们已注意到 (5) 中的和与 L 无关, 因此每个和必等于 (6). 于是当 $L \to \infty$ 时, (5) 变成

$$f(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{i\xi x_0}d'\xi,$$

且它对所有的 x_0 成立, 只要 $f(x)$ 是在一有限区间之外为零的 C^2 函数. 为了得到更一般的反演定理, 我们需要一个不同的论证 (参看本章末尾的补充). 然而, 由于我们将只利用反演定理来得到偏微的假设性解 (它将被个别验证), 所以对这种一般性就没有很大的必要.

也可能利用复 Fourier 级数的 Parseval 等式来得到在一有限区间之外为零的 C^1 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$(参看习题 12) 的 Parseval 等式 (参看下面的 (7)). 而我们将利用反演定理来证明以下 Parseval 等式更一般的形式:

Parseval 等式 如果 $f(x)$, $\hat{f}(\xi)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是绝对可积的, 且 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是分段 C^1 的, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi. \tag{7}$$

证明 在下面的计算中, 为了对 $f(x)$ 运用反演定理以及为了交换积分次序 (参看附录 2) 是正当的, 我们利用了假设条件,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d'\xi\right)\overline{g(x)}dx \quad (\text{反演定理})\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\overline{g(x)}e^{i\xi x}d'\xi dx\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\overline{g(x)}e^{i\xi x}d'x d\xi \quad (\text{附录 } 2)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\overline{\left(\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-i\xi x}d'x\right)}d\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi.
\end{aligned}$$

注意到在第一个等式的右边的逆变换在每个有限区间中可以有有限多个点不同于 $f(x)$, 但这不影响该积分的值. □

注记 当 $g = f$ 时, 由 Parseval 等式得到: 对任意速减函数 f, 有 $\|f\| = \|\hat{f}\|$, 其中 $\|f\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx}$. 这意味着 Fourier 变换是由速减函数组成的向量

空间的一个"旋转", 因为函数的长度保持不变. 该事实可用于把 Fourier 变换的概念延拓到更一般的函数类上去 (例如, $\|f\| < \infty$ 的平方可积函数, 但可以不是绝对可积的, 比如 $x/(1+x^2)$). 在通常的空间中, 一个不改变任意点到原点距离的线性变换必是可能由反射产生的一个旋转. 在由速减函数组成的无穷维空间中, 我们已证明 (参看第 7.2 节的习题 14) 存在正交 Hermite 函数族 $k_0(x)$, $k_1(x)$, $k_2(x), \cdots$, 满足 $\hat{k}_n(\xi) = (-i)^n k_n(\xi)$(即,$k_n$ 在复平面经旋转 $-n \cdot \frac{\pi}{2}$ 的值). □

附加例子

例 2 求 $h(x) = x^n e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ 的 Fourier 变换.

解 利用定义

$$\hat{h}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-i\xi x} d'x,$$

直接计算 $\hat{h}(\xi)$ 并非易事. 可以对 $e^{-\frac{1}{2}\xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-i\xi x} d'x$ 关于 ξ 求导 n 次来得到想要的结果. 而我们的技巧是利用关系 $\hat{h}(\xi) = \check{h}(-\xi)$(参看 (3)). 换言之, 来计算 $\hat{h}(\xi) = \xi^n e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$ 的逆变换 $\check{h}(x)$, 然后用 $-\xi$ 替换 $\check{h}(x)$ 中的 x 得到 $\hat{h}(\xi)$ (参看 (3)). 为计算 $\check{h}(x)$, 对 $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 利用公式 $\xi^n \hat{f}(\xi) = i^{-n}[f^{(n)}(x)]^\wedge(\xi)$ (参看第 7.2 节的推论 1), 结果有 $\hat{f}(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$. 由反演定理, 得

$$\check{h}(x) = [\xi^n \hat{f}(\xi)]^\vee(x) = [i^{-n}[f^{(n)}(x)]^\wedge]^\vee(x) = i^{-n} f^{(n)}(x) = i^{-n}\frac{d^n}{dx^n}\big(e^{-\frac{1}{2}x^2}\big).$$

因此,

$$\hat{h}(\xi) = \check{h}(-\xi) = i^{-n}(-1)^n \frac{d^n}{d\xi^n}\big(e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\big) = i^n \frac{d^n}{d\xi^n}\big(e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\big) = i^n p_n(\xi) e^{-\frac{1}{2}\xi^2},$$

其中 $p_n(\xi)$ 是次数为 n 的多项式. 我们有 $p_0(\xi) = 1$, $p_1(\xi) = -\xi$, $p_2(\xi) = \xi^2 - 1$, 用归纳法计算, 一般地有: $p_{n+1}(\xi) = -\xi p_n(\xi) + p_n'(\xi)$. □

例 3 利用 Parseval 等式和 (2′) 计算 $I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^4} dx$.

解 令 $g(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1}$. 由 Parseval 等式和第 7.2 节的命题 1, 得

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} |g'(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |(g')^\wedge(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{8}\pi\xi^2 e^{-2|\xi|} d\xi \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^{\infty} \xi^2 e^{-2\xi} d\xi = \frac{\pi}{4}\Big(-\frac{1}{2}\xi^2 e^{-2\xi}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \xi e^{-2\xi} d\xi\Big) \\ &= \frac{\pi}{4}\Big(-\frac{1}{2}\xi e^{-2\xi}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-2\xi} d\xi\Big) = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

□

例 4 根据形式计算, 以 $\hat{f}(\xi)$ 和 $(\hat{f})'(\xi)$ 表示

$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-s)f(x-s)f'(s)ds$$

的 Fourier 变换. 阐述在什么条件下这些计算是有效的.

解 令 $g(x)=xf(x)$. 则 $h(x)=(g*f')(x)$, 然后由卷积定理, 得

$$\hat{h}(\xi)=(g*f')^{\wedge}(\xi)=\sqrt{2\pi}\hat{g}(\xi)[f'(x)]^{\wedge}(\xi).$$

现由第 7.2 节的命题 1 和命题 2, 得

$$\hat{g}(\xi)=i\frac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi)\quad 和\quad [f'(x)]^{\wedge}(\xi)=i\xi\hat{f}(\xi),$$

由此得

$$\hat{h}(\xi)=-\sqrt{2\pi}\xi\hat{f}(\xi)\frac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi).$$

命题 1 和命题 2 分别要求 $f(x)$ 是具衰减阶 $(1,2)$ 和 $(0,3)$, 因此, 如果 $f(x)$ 是具衰减阶 $(1,3)$ 的话, 两个命题都能运用. 然后 $xf(x)$ 和 $f'(x)$ 还要满足定理 2(卷积定理) 中的条件. 于是, 这只要取 $f(x)$ 具有衰减阶 $(1,3)$. □

卷积定理和反演定理可用来解某些积分方程, 如下例所示.

例 5 解以下积分方程中的 $g(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(s)}{(x-s)^2+b^2}ds=\frac{1}{x^2+a^2}\quad (a>b>0).\tag{8}$$

可假设 $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|dx<\infty$ 以及 g 是 C^1 的.

解 如果令 $f(x)=\frac{1}{x^2+b^2}$, 则 (8) 成为 $(f*g)(x)=\frac{1}{x^2+a^2}$. 于是, 由卷积定理, 得

$$\sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)=\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^{\wedge}(\xi).\tag{9}$$

现由例 1, 有

$$\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^{\wedge}(\xi)=\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}e^{-a|\xi|}.\tag{10}$$

利用 (10)(以 b 替换 a) 求出 $\hat{f}(\xi)$, (9) 成为 $\hat{g}(\xi)=\frac{b}{a\sqrt{2\pi}}e^{-(a-b)|\xi|}$. 再运用 (10)(以 $a-b$ 替换 a) 以及利用反演定理, 得到

$$g(x)=\frac{b(a-b)}{a\pi(x^2+(a-b)^2)}.$$ □

Fourier 变换与 Laplace 变换之间的关系

设 $f(t)$ 是对 $t<0$ 为零的函数. 则

$$\sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\xi t}dt=\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-i\xi t}dt.$$

虽然前面总把 ξ 看作实数, 如果令 $\xi=-is$, 则有

$$\sqrt{2\pi}\hat{f}(-is)=\int_{0}^{\infty}e^{-st}f(t)dt. \tag{11}$$

(11) 的右端称为 $f(t)$ 的 **Laplace变换**, 记作

$$\mathrm{L}\ f(s)\equiv\int_{0}^{\infty}e^{-st}f(t)dt=\sqrt{2\pi}\hat{f}(-is). \tag{12}$$

因此, (12) 表明 f 的 Laplace 变换在 s 处实质上是 f 的 Fourier 变换在 $-is$ 处的值. 公式 (12) 说明这些变换具有许多共有性质. (12) 中的衰减因子 $e^{-st}(s>0)$ 使得对当 $t\to\infty$ 时不必是衰减的广泛的函数类可施行 Laplace 变换. 的确, 如果 $|f(t)|\leqslant Ke^{at}$, a 和 K 为某常数, Laplace 变换将对充分大的 s 有定义. 因此, 可大胆地应用 Laplace 变换技巧来解常系数常微方程组, 因为已经知道这些解最多是以指数增长. 而且, 对这种方程组的初值问题可转换成令人满意的代数问题. 然而, 对那些当 $t<0$ 时不恒为零的函数, Laplace 变换不理会 $t<0$ 的 $f(t)$ 的值 (为什么?), 于是这种函数一般不能从它们的 Laplace 变换完全复原. 因此, 尽管有苛刻的衰减要求, 当希望对不限制变量的函数做变换时 (例如, $f(x)$, $-\infty<x<\infty$), Fourier 变换通常比 Laplace 变换更可取.

概要 7.3

1. 反演定理: 设 $f(x)$ 是分段 C^1 函数 (即, $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在任意有限区间是分段连续的), 且有 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$. 则对所有实数 x, 有

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi. \tag{S1}$$

反演定理的证明在本章末尾的补充中, 但在本节, 当 $f(x)$ 是 C^2 的且在一个有限区间之外为零的情形证明了反演定理, 此结果可通过利用 Fourier 级数的收敛定理 (第 4.2 节的定理 2) 来证明.

2. 逆 Fourier 变换: 函数 $g(\xi)$ 的逆 Fourier 变换是

$$\check{g}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi)e^{i\xi x}d'\xi=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}g(\xi)e^{i\xi x}d'\xi,$$

只要该极限存在, 其中 $d'\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}d\xi$. 反演定理表明, 对适当的函数 $f(x)$(即, 连续的, 分段 C^1 的, 以及绝对可积的), 我们有 $(\hat{f})^{\vee}(x)=f(x)$. 一个函数的 Fourier 变换的图像是该函数逆 Fourier 变换的图像在垂直的坐标轴上的反射 (即, $\hat{g}(\xi)=\check{g}(-\xi)$). 特别, 对适当的函数 $f(x)$, 满足 $g=\hat{f}$, 得到 $(\hat{f})^{\wedge}(\xi)=f(-\xi)$. 这使得是某个适当函数的 Fourier 变换的函数的 Fourier 变换的计算变得容易 (参看例 1). 另外, 对适当的函数 f, 有 $f^{\wedge\wedge\wedge\wedge}=f$.

3. Parseval 等式: 如果 $f(x)$, $\hat{f}(\xi)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是绝对可积的, 且 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是分段 C^1 的. 则

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{g(x)}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi. \tag{S2}$$

4. 积分方程: 卷积定理和反演定理可用来解某种积分方程 (参看例 5).

5. Laplace 变换: $f(t)$ 的 Laplace 变换由以下定义

$$\mathrm{L}\ f(s)\equiv\int_{0}^{\infty}e^{-st}f(t)dt.$$

因此, 如果 $f(t)=0,\ t<0$, 则 $\mathrm{L}\ f(s)=\sqrt{2\pi}\hat{f}(-is)$.

练习 7.3

1. 求下列每个函数的逆 Fourier 变换:

   (a) $g(\xi)=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{1}{2}\xi^2/a},\ a>0$ (b) $g(\xi)=i\frac{e^{-i\xi}-1}{\xi\sqrt{2\pi}}$ (c) $g(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\xi}{\xi}$.

   提示 复习第 7.1 节的例子.

2. 证明: 两个速减函数 (参看第 7.2 节) 的卷积是速减函数.

3. 设 n 是一个正整数, 令 $h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-s)^n f(x-s)f'(s)ds$. 用形式计算以 $\hat{f}(\xi)$ 和 $(\hat{f})^{(n)}(\xi)$ 来表示 $h(x)$ 的 Fourier 变换.

   提示 参看例 4.

4. 令 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & 如果 \quad x \neq 0 \\ 1, & 如果 \quad x = 0 \end{cases}$. 证明 $\lim_{R\to\infty} \int_0^R |f(x)|dx$ 不存在.

提示 如果 $n\pi \leqslant x \leqslant (n+1)\pi$, $(n = 1, 2, \cdots)$, 则 $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{(n+1)\pi}$, 所以

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geqslant \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{(n+1)\pi}.$$

5. 利用基本公式 $\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots;\ \mathrm{Re}(a) > 0)$ 求下列函数的 Fourier 变换

(a) $f_n(x) = [\frac{1}{2}(x + |x|)]^n e^{-x}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

(b) $h_n(x) = [\frac{1}{2}(x + |x|)]^n \sin x e^{-x}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

提示 对 (b) 部分, 利用公式 $2i \sin x = e^{ix} - e^{-ix}$.

6. (a) 解积分方程 $\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}b(x-y)^2} g(y) dy = e^{-\frac{1}{2}ax^2}$, 其中 $0 < a < b$.

(b) 当 $a \geqslant b$ 时为什么会存在不绝对可积的, 分段连续的函数满足该方程?

提示 参看第 7.1 节的习题 10.

7. 利用 Parseval 等式计算下面定积分的值, 其中 a, $b > 0$:

(a) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(a^2+x^2)^2} dx$　　(b) $\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{\sin(ax)}{x}\right)^2 dx$

(c) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(bx)}{x(a^2+x^2)} dx$　　(d) $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-ax^2}}{b^2+x^2} dx$.

注记 如我们已经表述过的, 注意到 Parseval 等式不可用于 (b) 部分 (为什么?), 即使由此得出正确结果. 通过利用 (在 $x = 0$) 结果 $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$, 当 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是分段连续和绝对可积 (这样可以应用第 7.2 节的卷积定理) 以及当 $(f * g)(x)$ 是连续的, 分段 C^1 和绝对可积时 (为了反演定理) 该结果是有效的, 来尝试严格证明 (b) 部分.

8. 令

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \left(e^{-k\xi^2 t} \int_0^t e^{k\xi^2 s} \hat{q}(\xi, s) ds\right) e^{i\xi x} d\xi, \quad 其中\ k > 0.$$

证明

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} \int_{-\infty}^\infty (\int_0^t \frac{q(y,s)}{\sqrt{t-s}} e^{-(y-x)^2/4k(t-s)} ds) dy,$$

为了允许交换积分次序, 假设 $q(y, s)$ 是足够好 (例如, 是有界和连续的).

9. 求满足以下积分方程的函数 $f(x)$

$$f(x) + \int_0^\infty f(x-t) e^{-t} dt = \frac{1}{1+x^2}. \tag{*}$$

提示 令 $g(t) = e^{-t}$, $t \geqslant 0$, 且在其他处等于 0. 注意到 (*) 中的积分是卷积 $(f * g)(x)$.

10. 计算下面积分的值

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\xi}{\xi^2}e^{i\xi x}d\xi.$$

提示 利用反演定理和第 7.1 节的习题 3.

11. 由考虑以 $e^{i\xi x}$ 替换 $\sin(\xi x)$ 产生的结果来计算下面积分的值

$$f(x)\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{\infty}\xi\sin(\xi x)e^{-\frac{1}{2}\xi^2}d\xi.$$

12. 在 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是 C^1 的, 且在某个有限区间, 比如 $[-L,L]$ 之外等于 0 的情形下, 证明从关于 Fourier 级数复形式的 Parseval 等式 (参看第 7.1 节) 可得 Parseval 等式 $\int_{\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=\int_{\infty}^{\infty}|\hat{f}(\xi)|^2d\xi$.

提示 如同在 Fourier 级数推导反演定理过程中所做的, 用 $f(x)$ 的 Fourier 变换写出 $f(x)$ 在 $[-L,L]$ 上的复 Fourier 系数. 然后对复 Fourier 级数应用 Parseval 等式, 再由 $L\to\infty$ 取极限, 从 Riemann 和得到积分 (参看 (4),(5) 和 (6)).

13. 假设 $f(x)$ 是绝对可积和分段 C^1 的, 且对某个复常数 α, 有 $\hat{f}(\xi)=\alpha f(\xi)$. 证明 α 必为 1, i, -1 或 $-i$. 再证明如果 $\alpha=\pm1$,$f(x)$ 是偶的, 而如果 $\alpha=\pm i$, 则 $f(x)$ 是奇的. 注意到有许多这种函数的例子 (参看第 7.2 节习题 14 中的 Hermite 函数).

提示 首先注意到 $\alpha^4=1$(为什么?).

14. 对实数 $x\neq n$, 定义 $w_n(x)=\frac{\sin(\pi(x-n))}{\pi(x-n)}$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 以及 $w_n(n)=1$. 令

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}, & -\pi\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & \text{其他点}.\end{cases}$$

(a) 利用第 7.1 节的例 4 证明 $\hat{f}_n(\xi)=w_n(\xi)$.

(b) 由形式应用 Parseval 等式, 或严格地由利用卷积定理 (参看习题 7(b) 后面的注记) 来证明 $\int_{-\infty}^{\infty}w_n(\xi)w_m(\xi)d\xi=\begin{cases}0, & m\neq n\\ 1, & m=n.\end{cases}$ 因此, $w_n(\xi)$ 构成 $(-\infty,\infty)$ 上范数平方为 1 的正交族.

(c) 假设对某些复常数 c_n $(-N\leqslant n\leqslant N)$[①], $g(x)=\sum_{n=-N}^{N}c_nf_n(x)$. 不用 Parseval 等式证明 $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2dx=\sum_{n=-N}^{N}|c_n|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{g}(\xi)|^2d\xi$.

(d) $g(x)$ 如同 (c) 部分, 证明 $\hat{g}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\xi)\frac{\sin(\pi(\xi-t))}{\pi(\xi-t)}d\xi$.

注记 形如

$$\hat{g}(\xi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nw_n(\xi),\quad 其中\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2<\infty,$$

①原文误为 $-N<n<N$.——译者

的函数称为 **Paley-Wiener函数**, 级数称为函数 $\hat{g}(\xi)$ 的**基级数**. 这种级数在狭窄波段信号的 Whittaker-Shannon 采样理论中起了主要作用 (参看 [J.R.Higgins, *Five short stories about the cardinal series*, Bull.Amer.Math.Soc.(New Series)**12** (1985), 45-89]). (d) 部分的结果表明

$$w(x,t)=\frac{\sin(\pi(x-t))}{\pi(x-t)}$$

是 Paley-Wiener 函数类的**再生核**.

§7.4 偏微的 Fourier 变换方法

在本节我们利用 Fourier 变换方法来导出在某种无界区域上偏微边值问题的假定性解. 由于对这些假定性解总要进行个别验证它们是事实上的解, 所以没有绝对必要来证明在推导假定性解中的每一步的正当性. 而且, 证明 Fourier 变换方法在推导这些假定性解中的正当性的任何尝试注定是失败的, 因为这些方法预先假设解不仅存在 (本身就是一个无根据的假设), 而且还假设解衰减得足够快以至于它的 Fourier 变换存在. Fourier 变换仅仅向我们提供了一个假定性的解 (需要用其他手段验证), 不用这些方法或许无法猜出这个解 (参看第 7.2 节的例 3).

无限杆的热问题

这里我们将证明: 如果 $f(x)$ 是连续的, 或是绝对可积 (即, $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$), 或是有界的 (即, 对所有的 x, 有 $|f(x)|\leqslant M$), 则下面初值问题有解 $u(x,t)$, 它在整个闭半平面 $t\geqslant 0$, $-\infty<x<\infty$ 上连续, 且对 $t>0$ 是 D.E. 的 C^{∞} 解.

$$\begin{array}{ll}\text{D.E.} & u_t=ku_{xx},\quad -\infty<x<\infty;\\ \text{I.C.} & u(x,0)=f(x).\end{array}\tag{1}$$

该解由以下公式给出

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/4kt}f(y)dy,\quad t>0$$

和 (2)

$$u(x,0)=f(x),\quad t=0.$$

注意到如果对 $t>0$, $-\infty<x<\infty$ 定义 $u(x,t)\equiv 0$ 以及对 $t=0$, $u(x,0)=f(x)$, 则也得到问题 (1) 的解. 然而这个解在 x 轴上的点不连续, 除非 $f(x)\equiv 0$, 即对所有的 x_0, 没有**连续条件**

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0^+)}u(x,t)=f(x_0), \tag{3}$$

除非 $f(x)\equiv 0$. D.E. 不满足连续条件 (3) 的任何解没有任何明显的价值. 这就是为什么最终证明 (2) 确实满足 (3) 是重要的. 由于 (2) 的被积函数关于 x 和 t(不是 y) 的偏导数关于 y 是绝对可积的, 故由 Leibniz 法则 (参看附录 3) 得到 (2) 中的 $u(x,t)$ 实际上对 $t>0$, $-\infty<x<\infty$ 是 C^∞, 即使 $f(x)$ 不必是 C^1. 换言之, 温度分布即刻就变得平滑. 如果 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$ 以及 $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$(参看第 7.1 节的习题 12), 我们将证明: 对任意 $T>0$, 由 (2) 定义的 $u(x,t)$ 满足

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\max_{0\leqslant t\leqslant T}|u(x,t)|\right)=0. \tag{4}$$

此外, 将应用最大值原理证明 $u(x,t)$ 是具有性质 (4) 的 (1) 的唯一解. 没有像 (4) 那样的附加条件, 无法保证 (1) 只有一个解. 的确, 如下例所示, 即使当 $f(x)\equiv 0$ 时, (1) 存在连续的非零解, 但它们不满足 (4).

例 1 在 1935 年, 俄罗斯数学家 A.N.Tychonov 证明了关于具零初始温度的无限杆问题

$$\text{D.E.}\quad u_t=u_{xx},\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0;$$
$$\text{I.C.}\quad u(x,0)=0,$$

有不同于显然的解 $u(x,t)\equiv 0$ 的解 (即, 唯一性不成立!). 我们给出 Tychonov 解的构造的梗概.

令

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/t^2}, & \text{如果 } t\neq 0,\\ 0, & \text{如果 } t=0,\end{cases}$$

又令

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(t)\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad -\infty<x<\infty,\ t\geqslant 0.$$

可对上面的级数逐项求导.(逐项求导的正当性, 见 D.V.Widder, *The Heat Equation*, Academic Press, New York(1975), p.26 和第三章.) 因此,

$$u_t=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n+1)}(t)\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\sum_{m=1}^{\infty}f^{(m)}(t)\frac{x^{2(m-1)}}{(2(m-1))!}=\sum_{n=1}^{\infty}f^{(n)}(t)\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}=u_{xx},$$

其中为了得到第二个和式已做了指标变换 $m=n+1$, 然后为得到第三个和式, 令 $n=m$. 由于 $f(0)=0$ 以及 $f^{(n)}(0)=0$, $n=1,2,3,\cdots$(参看习题 1), 故 $u(x,0)=0$, 以及经一些努力, 可验证连续条件 (3). 但 $u(x,t)$ 不恒等于零, 因为 $u(0,t)=f(t)$ 且对所有的 $t\neq 0$, $f(t)>0$. □

由 Fourier 变换方法获得问题 (1) 的解 (2)

由于已经看到以下公式的作用

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/4kt}f(y)dy\quad (t>0),\tag{5}$$

读者无疑首先想知道如何得到该公式. 这可通过纯粹形式应用前面的章节已建立起来的 Fourier 变换的性质得到. Fourier 方法预先假定 $u(x,t)$ 存在且 (以及 $f(x)$) 具有适当的衰减阶. 它们不构成任何证明, 但如下面将看到的, 它们给我们提供可验证的由公式给出的假定性解.

对 (1) 中 D.E. 的两边关于变量 x 取 Fourier 变换, 保持 t 固定, (形式上) 得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_t(x,t)e^{-i\xi x}d'x=\int_{-\infty}^{\infty}ku_{xx}(x,t)e^{-i\xi x}d'x.$$

利用第 7.2 节的推论 1(自然是形式上的), 得

$$\hat{u}_t(\xi,t)=k(i\xi)^2\hat{u}(\xi,t)=-k\xi^2\hat{u}(\xi,t).\tag{6}$$

注意到对固定的 ξ, (6) 是关于 t 的一阶常微. (6) 的解具有形式 $\hat{u}(\xi,t) = F(\xi)e^{-k\xi^2 t}$, 其中 $F(\xi)$ 可由令 $t=0$ 确定:

$$F(\xi) = \hat{u}(\xi,0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)e^{-i\xi x}d'x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}d'x.$$

因此, $F(\xi) = \hat{f}(\xi)$, 所以 $\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)e^{-k\xi^2 t}$. 由第 7.1 节的例 6, 对任意的常数 $a>0$, 有

$$(\sqrt{a}e^{-\frac{1}{2}ax^2})^\wedge(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\xi^2/a}.$$

因此, 取 $a = 1/(2kt)$, $t>0$, 得

$$(\frac{1}{\sqrt{2kt}}e^{-x^2/(4kt)})^\wedge(\xi) = e^{-k\xi^2 t}.$$

如果 $g(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2kt}}e^{-x^2/(4kt)}$, 则由形式利用卷积定理, 得

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f*g)^\wedge(\xi).$$

让 t 固定, 两边取逆变换, 得到公式 (5):

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(y)g(x-y)dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4kt)}f(y)dy.$$

免得读者对这些形式计算过分欢喜, 我们再次指出: 并没有证明 (2) 是 (1) 的解. 甚至没有证明解存在! 现在继续证明 (2) 实际上是 (1) 满足连续条件 (3) 的解.

问题 (1) 的解 (2) 的有效性的证明

先证明当 $t>0$ 和 $f(x)$ 是连续且有界或绝对可积时, (2)(或 (5)) 是 D.E. $u_t = u_{xx}$ 的解. 可把公式 (5) 重写成形式:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y,t)f(y)dy, \tag{7}$$

其中

$$H(x-y,t) \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-(x-y)^2/(4kt)} \ (t>0). \tag{8}$$

定义 (8) 中的函数 $H(x-y,t)$ 称为无限杆热方程的**热核**(或**源解**或**基本解**).

我们有 $H_t = kH_{xx}$, 因可直接验证 (参看第 3.1 节的例 1). 由于在位置 y 处的集中的初始温度源 (参看本章引论中的图 1), 直观上 $H(x-y,t)$ 代表在时刻 t 在位置 x 处的温度分布. 由于 $H_t = kH_{xx}$, 故得出 (7) 是 $u_t = ku_{xx}$, $t > 0$ 的解, 如果能证明 (7) 在积分号下关于 x 和 t 求导是正当的话. 幸运的是, 对 $t > 0$,(2) 的被积函数关于 x 和 t 的所有偏导数关于 y 是连续和绝对可积的 (参看第 7.2 节的例 1). 这是可行, 如果 $f(y)$ 是连续和绝对可积或有界的.(的确, 由于 $H(x-y,t)$ 关于变量 y 是迅速衰减的, 可只要求 $|f(y)| < Ce^{|y|}$.) 于是, 根据 Leibniz 法则 (参看附录 3), 对 $t > 0$ 在 (7) 中可畅通无阻的求导数. 因此 (7) 中的 $u(x,t)$ 满足 D.E.. 注意到 $f(y)$ 关于 x 和 t 是常数, 所以不必有关于 $f(y)$ 的可微性的假设.

剩下来证明连续性条件 (3) 成立. 由在第 7.1 节的例 6 中所证明的结果 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2}dx = \sqrt{2\pi/a}$(取 $a = \frac{1}{2kt}$ 和 $z = x - y$), 我们知道, 对 $t > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x-y,t)dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4kt)}dy = 1. \tag{9}$$

考虑由 (7) 给出的 $u(x,t)$. 则由 (9), 有

$$\begin{aligned}|u(x,t) - f(x_0)| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} H(x-y,t)f(y)dy - f(x_0)\int_{-\infty}^{\infty} H(x-y,t)dy\right| \\ &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} H(x-y,t)[f(y)-f(x_0)]dy\right| \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y,t)|f(y)-f(x_0)|dy.\end{aligned} \tag{10}$$

为证明连续性条件 (3), 必须证明 $|u(x,t) - f(x_0)|$(或 (10) 中最后的积分) 通过取 (x,t)(在半平面 $t > 0$ 中) 充分接近 $(x_0, 0)$ 可变得所希望的任意小. 为此, 把 (10) 最后的积分分解成三部分:

$$\left(\int_{-\infty}^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^{\infty}\right) H(x-y,t)|f(y)-f(x_0)|dy,$$

其中 δ 是正常数. 令这些积分从左到右记作 I_1, I_2 和 I_3. 因 $f(x)$ 是连续的, 故对任意 $\epsilon > 0$, 如果 x 充分靠近 x_0 且 δ 充分小, 对 $[x-\delta, x+\delta]$ 的 y, 有

$|f(y)-f(x_0)|<\epsilon$. 则

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{x-\delta}^{x+\delta} H(x-y,t)|f(y)-f(x_0)|dy \leqslant \int_{x-\delta}^{x+\delta} H(x-y,t)\epsilon dy \\ &\leqslant \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y,t)dy = \epsilon. \end{aligned}$$

换言之, 通过取 x 充分靠近 x_0 以及取 δ 充分小, 可使 I_2 达到想要的任意小. 现来证明不管 $\delta>0$ 的选取, 通过取 $t>0$ 充分小, 积分 I_1 和 I_3 可取到所希望的那样小. 我们只对 I_3 来做, 因 I_1 可做同样处理. 我们有

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{x+\delta}^{\infty} H(x-y,t)|f(y)-f(x_0)|dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{x+\delta}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4kt}|f(y)-f(x_0)|dy \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{x+\delta}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4kt}|f(y)|dy \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{x+\delta}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4kt}|f(x_0)|dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{\delta}^{\infty} e^{-z^2/4kt}|f(x+z)|dz \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{\delta}^{\infty} e^{-z^2/4kt}|f(x_0)|dz \end{aligned} \tag{11}$$

当 $f(x)$ 是有界的, 比如 $|f(x)\leqslant M$ 时, 则 (11) 的最后两个积分每个不超过

$$\frac{M}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{\delta}^{\infty} e^{-z^2/4kt}dz \leqslant \frac{M}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{\delta}^{\infty} e^{-z\delta/4kt}dz = \frac{M4kt}{\delta\sqrt{4\pi kt}} e^{-\delta^2/4kt},$$

这项通过取 t 充分小且是正数, 可取得想要的那样小. 当 $f(y)$ 不必是有界, 而是绝对可积时, (11) 中的第二个积分像有界情形那样处理, 而 (11) 中的第一个积分估计如下:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4kt}}|f(x+z)|dz &\leqslant \frac{e^{-\frac{\delta^2}{4kt}}}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{\delta}^{\infty} |f(x+z)|dz \\ &\leqslant \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{4\pi k} e^{\frac{\delta^2}{4kt}}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|dy. \end{aligned}$$

应用一次 L'Hospital 法则表明当 $t\to 0^+$ 时, 最后的商式极限趋于 0, 同时由于 $f(x)$ 是绝对可积的, 故最后的积分是有限的. 因此, 当 $f(x)$ 是有界或绝对可积

时, 对任意正数 δ, 通过取 t 充分小且是正的, 可使 I_3(类似地 I_1) 任意小. 回想起已经证明 $f(x)$ 的连续性确保对充分靠近 x_0 的 x 和充分小的 δ, 可使 I_2 任意小. 如我们所注意到的, 这些事实以及 (10) 确保连续性条件 (3). 总之, 我们建立了下述关键结果.

定理 1 令 $f(x)$, $-\infty < x < \infty$ 是连续的, 且或是有界或是绝对可积. 则由

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4kt)}f(y)dy, & t>0;\\ f(x) & t=0.\end{cases}\tag{12}$$

定义的函数 $u(x,t)$ 在区域 $\{(x,t);\ t>0,\ -\infty<x<\infty\}$ 内是 C^∞ 的, 在$\{(x,t);\ t\geqslant 0,\ -\infty<x<\infty\}$ 内是连续的, 且对 $t>0$, $-\infty<x<\infty$ 满足$u_t=ku_{xx}$. 特别, (12) 满足问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx},\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x),\end{aligned}\tag{13}$$

以及连续性条件: 当 $(x,t)\to(x_0,0^+)$ 时 $u(x,t)\to f(x_0)$.

在下面的例子中阐述了定理 1 的用处以及说明了即使 $f(x)$ 是一个简单函数, (12) 的积分计算会是困难的事实. 有机会使用计算机上的符号积分 (例如, Macsyma, Maple, Derive 或 Mathematica) 的读者可验证下面给出的结果 (14).

例 2 当 $f(x)=e^{-\alpha x^2}\cos(\beta x)$, $\alpha>0$ 情形时求解问题 (13).

解 由于 $f(x)$ 是有界和连续的, 故 (13) 的一个解是 (对 $t>0$)

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4kt)}e^{-\alpha y^2}\cos(\beta y)dy\\&=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4kt)}e^{-\alpha y^2+i\beta y}dy\right).\end{aligned}$$

为计算最后的积分, 合并指数并完全平方:

$$e^{-(x-y)^2/(4kt)}e^{-\alpha y^2+i\beta y} = \exp\left(-\frac{1}{2}\delta\left[y^2-2\delta^{-1}\left(\frac{x}{2kt}+i\beta\right)y\right]-\frac{x^2}{4kt}\right)$$

$$(\text{其中}\quad \delta\equiv\frac{1}{2kt}+2\alpha)$$

$$= e^{-\frac{x^2}{4kt}}\exp\left(-\frac{1}{2}\delta\left[y-\delta^{-1}\left(\frac{x}{2kt}+i\beta\right)\right]^2\right)\exp\left(\frac{1}{2}\delta\delta^{-2}\left(\frac{x}{2kt}+i\beta\right)^2\right)$$

$$= e^{-\frac{x^2}{4kt}}e^{-\frac{1}{2}\delta(y-\gamma)^2}e^{\frac{1}{2}\delta\gamma^2},$$

其中 $\gamma\equiv\frac{1}{\delta}(\frac{x}{2kt}+i\beta)$. 此时,

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{4kt}}e^{-\frac{1}{2}\delta(y-\gamma)^2}e^{\frac{1}{2}\delta\gamma^2}dy = e^{-\frac{x^2}{4kt}}e^{\frac{1}{2}\delta\gamma^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\delta(y-\gamma)^2}dy = \sqrt{\frac{2\pi}{\delta}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}e^{\frac{1}{2}\delta\gamma^2},$$

其中最后的等式由第 7.1 节的例 6 的解答得到, 即 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\delta(y-\gamma)^2}dy=\sqrt{2\pi/\delta}$, 即使当 γ 是复常数 (验证!). 因此,

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4kt)}e^{-\alpha y^2+i\beta y}dy\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\sqrt{\frac{2\pi}{\delta}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}\mathrm{Re}\big(e^{\frac{1}{2}\delta\gamma^2}\big)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2kt\delta}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}\mathrm{Re}\left(e^{\frac{1}{2}\delta^{-1}[(x/2kt)^2-\beta^2]+i\frac{\beta x}{2\delta kt}}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+4kt\alpha}}\exp\big(-\frac{x^2}{4kt}+\frac{1}{2}\delta^{-1}[(\frac{x}{2kt})^2-\beta^2]\big)\cos\frac{\beta x}{2\delta kt}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+4kt\alpha}}\exp\big(-\frac{\alpha x^2+\beta^2 kt}{1+4\alpha kt}\big)\cos\frac{\beta x}{1+4\alpha kt}.
\end{aligned}\tag{14}$$

于是 $u(x,0)=e^{-\alpha x^2}\cos(\beta x)$. 如果 $\alpha=0$,(14) 是乘积解 $e^{-\beta^2kt}\cos\beta x$. □

注记 注意到 (14) 不是问题的唯一解, 因为可以对 (14) 加上例 1 中 Tychonov 解的任意常数倍. 为得到唯一性, 对解 $u(x,t)$ 在 $|x|$ 大时的行为加上一些限制 (即, 在 $\pm\infty$ 处需要某些 "边界条件"). 从物理的观点来看, 一个诱人的条件是: 期望的解当 $|x|\to\infty$ 时趋于零. 在这种情形, 我们有如下结果. □

定理 2(唯一性定理) 假设对 $-\infty < x < \infty$, $f(x)$ 是连续和绝对可积的, 且当 $x \to \pm\infty$ 时 $f(x) \to 0$, 则由

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4kt)} f(y)dy, & t > 0, \\ f(x), & t = 0 \end{cases} \tag{15}$$

定义的函数 $u(x,t)$ 是问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_t = ku_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0; \\ &\text{I.C.} \quad u(x,0) = f(x); \\ &\text{“B.C.”} \quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(\max_{0\leqslant t\leqslant T} |u(x,t)|\right) = 0, \quad \text{对所有的 } T > 0 \end{aligned} \tag{16}$$

唯一的连续 (对 $t \geqslant 0$) 解.

证明 如果有 (16) 的两个解, 记为 u_1 和 u_2, 则由 “B.C.”, 对每个小的 $\epsilon > 0$ 和 $x_0 > 0$ 充分大, 有

$$|u_1(\pm x_0, t) - u_2(\pm x_0, t)| \leqslant \epsilon, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$|u_1(x,0) - u_2(x,0)| = 0 \leqslant \epsilon, \qquad -x_0 \leqslant x \leqslant x_0.$$

则由最大值原理的一个推论 (参看第 3.2 节的定理 3 并注意到在论证中 u 在 $t = 0$ 处不必是 C^2 的), 在矩形 $-x_0 \leqslant x \leqslant x_0$, $0 \leqslant t \leqslant T$ 内有 $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \epsilon$. 因此, 在半平面 $t > 0$ 中任取 (x,t), 通过取 $T > t$ 以及 x_0 充分大, 可得 $|u_1(x,t) - u_2(x,t)|$ 小于任意正数 ϵ. 因此 $u_1(x,t) = u_2(x,t)$. 于是证明了如果 (16) 有解的话, 则只有一个解. 剩下来要证明 (15) 是其解. 由定理 1, 只需证明 (15) 满足 (16) 中的 “B.C.”.

得到下面的第二个不等式用到了 (9), 对 $t > 0$ 和任意的 $A > 0$, 有

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leqslant \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{|y-x|\leqslant A} e^{-(x-y)^2/(4kt)} |f(y)|dy \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{|y-x|>A} e^{-(x-y)^2/(4kt)} |f(y)|dy \\ &\leqslant \max_{x-A\leqslant y\leqslant x+A} |f(y)| + \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-A^2/(4kt)} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|dy. \end{aligned} \tag{17}$$

对充分大的 A, 可使第二项任意小, 因为可以证明函数 $(4\pi kt)^{-\frac{1}{2}}e^{-A^2/(4kt)}$ 的绝对最大值是 $(2\pi e)^{-\frac{1}{2}}A^{-1}$, 证明如下:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-A^2/(4kt)}\right)=\frac{1}{(4\pi kt)^{3/2}}e^{-A^2/(4kt)}\left(\frac{2\pi k}{t}\right)\left(\frac{A^2}{2k}-t\right)$$

对 $t>A^2/2k$ 是负的, 对 $0<t<A^2/(2k)$ 是正的. $\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-A^2/(4kt)}$ 的最大值 (在 $t=A^2/(2k)$ 处) 是 $\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}A^{-1}$. 因此, 对 A 充分大, 可使 (17) 中的第二项如所期望的那样小, 然后对 x 充分大 (A 固定), 第一项当 $x\to\pm\infty$ 时趋于 0, 因为 $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$. 于是, 对 (15) 来说 (16) 中的 "B.C." 成立. □

注记 定理 2 意味着对 $\alpha>0$, 解 (14) 是唯一的满足条件

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\max_{0\leqslant t\leqslant T}|u(x,t)|\right)=0$$

的解. 但当 $\alpha=0$ 时, 定理 2 不能应用, 因为 $\cos(\beta x)$ 既不是绝对可积, 当 $x\to\pm\infty$ 时也不是趋于零. 然而, $u(x,t)=e^{-\beta^2kt}\cos(\beta x)$ 是关于 x 具周期为 $\frac{2\pi}{\beta}$ 的唯一解. 的确, 周期解对应于环形金属丝上的解, 已经证明了这种情形的唯一性 (参看第 3.2 节的例 1). □

例 3 求

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx}+q(x,t),\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=0\end{aligned}\tag{18}$$

的形式解.

解 下面的形式运算只起到发现假定性解的作用, 该假定性解的有效性在有关源项 $q(x,t)$ 的某些假设下可直接验证. 先对 D.E. 的两边关于 x 取 Fourier 变换. 于是, 得

$$\hat{u}_t(\xi,t)=k(i\xi)^2\hat{u}(\xi,t)+\hat{q}(\xi,t)\quad 或\quad \hat{u}(\xi,t)+k\xi^2\hat{u}(\xi,t)=\hat{q}(\xi,t).\tag{19}$$

注意到方程 (19) 是关于 t 的一阶线性常微. 因此, 如以积分因子 $e^{k\xi^2t}$ 乘 (19), 则得

$$\frac{\partial}{\partial t}[\hat{u}(\xi,t)e^{k\xi^2t}]=e^{k\xi^2t}\hat{q}(\xi,t)\quad 或\quad \hat{u}(\xi,t)e^{k\xi^2t}=\int_0^t e^{k\xi^2s}\hat{q}(\xi,s)ds+F(\xi).$$

而由 I.C. $u(x,0)=0$ 和 $\hat{u}(\xi,0)=F(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)e^{-i\xi x}dx=0$. 由此, 得

$$\hat{u}(\xi,t)=e^{-k\xi^2t}\int_0^t e^{k\xi^2s}\hat{q}(\xi,s)ds,$$

形式应用反演定理得到

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(\xi,t)e^{i\xi x}d\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\big(e^{-k\xi^2t}\int_0^t e^{k\xi^2s}\hat{q}(\xi,s)ds\big)e^{i\xi x}d\xi$$
$$=\frac{1}{\sqrt{4\pi k}}\int_{-\infty}^{\infty}\big(\int_0^t\frac{q(y,s)}{\sqrt{t-s}}e^{-(y-x)^2/(4k(t-s))}ds\big)dy,$$

(参看第 7.3 节的习题 8). 由形式应用 Duhamel 原理也能获得相同的假定性解 (参看习题 10). □

例 4 假设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的连续奇函数. 如果 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上绝对可积且当 $x\to\pm\infty$ 时 $f(x)\to 0$, 证明下述问题唯一的连续解关于变量 x 也是奇的:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx},\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x);\\&\text{"B.C."}\quad \lim_{x\to\pm\infty}\big(\max_{0\leqslant t\leqslant T}|u(x,t)|\big)=0,\quad \text{对所有的 } T>0.\end{aligned}\tag{20}$$

说明如果去掉 "B.C.", 结论不成立.

解

方法 1 由定理 2, 问题 (20) 的唯一解由以下给出:

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4kt)}f(y)dy, & t>0,\\ f(x), & t=0.\end{cases}$$

所给的 $u(x,0)$ 是奇函数. 如果 $t>0$, 则令 $z=-y$, 由于 $f(-z)=-f(z)$, 得

$$u(-x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x+y)^2/(4kt)}f(y)dy$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\infty}^{-\infty}e^{-(x-z)^2/(4kt)}f(-z)dz=-u(x,t).$$

因此, $u(x,t)$ 是 x 的奇函数.

方法 2 注意到 $-u(-x,t)$ 也满足 (20) 并利用唯一性 (参看定理 2). 没有 "B.C." 条件, 可把 (偶的)Tychonov 解加到上述的奇解上, 由此得到非奇的解. □

注记 没有 "B.C.", 可得到 (20) 的不止一个奇函数解, 因为可以对 Tychonov 解关于 x 求导并得到具零初始数据的奇函数解, 它可加到上述标准的解得到另一个奇函数解. □

例 5 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上连续和绝对可积, 令

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4kt)}f(y)dy \quad (t>0). \tag{21}$$

验证下面的关系并给出它的物理解释:

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)dy. \tag{22}$$

解 由于 (21) 的被积函数在 xy-平面上是绝对可积的, 故下面的计算可交换积分次序 (参看附录 2).

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4kt)}f(y)dy\right)dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4kt)}dx\right)f(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)dy,\end{aligned}$$

其中利用了事实 $\int_{-\infty}^{\infty}H(x-y,t)dy=1$(参看 (9)). 等式 (22) 可看作能量守恒定律的特殊例子. 的确, 在任意时刻 $t>0$, (22) 的左边是 (以适当的单位) 在时刻 t 时杆内总热能, 而 (22) 的右边是初始总热能. □

例 6 对 $t>0$, 考虑热方程 $u_t=ku_{xx}$ 的基本解 (参看 (8))

$$H(x,t)\equiv\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-x^2/(4kt)}. \tag{23}$$

对固定的 t, x 的函数 $H(x,t)$ 记作 ${}_tH(x)$, 只要不与偏导数 H_t 相混淆. 证明

$$({}_tH *{}_t H)(x)={}_{2t}H(x) \quad (t>0). \tag{24}$$

解 根据卷积定义 (参看第 7.2 节), 对 $t>0$, 有

$$\begin{aligned}({}_tH *{}_t H)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}{}_tH(x-y)\,{}_tH(y)dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-(x-y)^2/(4kt)}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-y^2/(4kt)}dy\\ &= \frac{1}{4\pi kt}e^{-x^2/(8kt)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(y-\frac{1}{2}x)^2/(2kt)}dy=\frac{1}{4\pi kt}e^{-x^2/(8kt)}\sqrt{2\pi kt}\\ &= \frac{1}{\sqrt{8\pi kt}}e^{-x^2/(8kt)}={}_{2t}H(x),\end{aligned}$$

其中用到了以 $\frac{1}{2}x$ 替换 x 和以 $\frac{1}{2}t$ 替换 t 的 (9). 在习题 (8), 利用卷积定理的一个不同 (且更容易的) 证法得出更一般的结果: 对所有正数 s 和 t, ${}_sH *{}_t H=$

${}_{(s+t)}H$. 这个另一证法更容易, 是由于函数的 Fourier 变换相乘比函数的卷积简单得多. □

注记 解 (21) 可写成 $u(x,t) = ({}_tH * f)(x)$(为什么?). 对 $s > 0$, 令 $g(x) = u(x,s)$. 由于 $u(x,s+t)$ 是在时刻 t 时具初始温度 $g(x)$ 的解, 故

$$({}_{(s+t)}H * f)(x) = u(x,t+s) = ({}_tH * g)(x) = ({}_tH * ({}_sH * f))(x) = (({}_sH *_t H) * f)(x).$$

比较最左端和最右端, ${}_sH *_t H = {}_{(s+t)}H$ 并不让人感到惊奇. 的确, 这个论证说明可以期望这种卷积性质对方程的关于一个变量的平移是不变的基本解成立. □

例 7 求问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_t - ku_{xx} = -\lambda u, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0; \\ &\text{I.C.} \quad u(x,0) = f(x) \end{aligned} \tag{25}$$

的连续解, 其中 λ 是常数, $f(x)$ 是连续有界函数. 对 (25) 中的 D.E. 给出物理解释.

解 对 D.E. 形式运用 Fourier 变换, 得

$$\hat{u}_t(\xi,t) + (k\xi^2 + \lambda)\hat{u}(\xi,t) = 0.$$

因此, 形式上 $\hat{u}(\xi,t) = e^{-\lambda t}\hat{f}(\xi)e^{-k\xi^2 t}$ (为什么?). 由于 $e^{-\lambda t}$ 与 ξ 无关, 故由形式利用卷积定理, 得

$$\begin{aligned} u(x,t) &= [\hat{u}(\xi,t)]^\vee(x) = e^{-\lambda t}[\hat{f}(\xi)e^{-k\xi^2 t}]^\vee(x) \\ &= e^{-\lambda t}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4kt)} f(y)dy. \end{aligned}$$

利用定理 1, 可验证该函数满足原问题. 的确, 注意到 $u(x,t) = e^{-\lambda t}v(x,t)$, 这里 $v_t = kv_{xx}$. 因此, $u_t = -\lambda e^{-\lambda t}v + e^{-\lambda t}v_t = -\lambda u + ku_{xx}$, 正如所要求的. 还有, $u(x,0) = e^{-\lambda 0}v(x,0) = f(x)$.

如果 $\lambda > 0$, 则 D.E. 中项 $-\lambda u$ 的出现可能产生于经由杆的侧表面的热流, 比如由于不完全绝热 (参看第 3.1 节的习题 9). 如果 $\lambda < 0$, 则项 $-\lambda u$ 代表一热源, 它的强度与温度成比例, 比如由于化学反应或核反应. □

用 Fourier 变换方法推导 D'Alembert 公式

虽然在第五章中对波方程的处理以原来的方式是足够了, 然而用 Fourier 变

换方法来获得 D'Alembert 公式是有益的. 考虑问题

$$\begin{array}{ll} \text{D.E.} & u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad -\infty<x,\ t<\infty; \\ \text{I.C.} & u(x,0)=f(x), \quad u_t(x,0)=g(x). \end{array} \tag{26}$$

我们还是作形式运算. 最后结果的合理性已经在第五章验证了. 对 D.E. 的两边关于 x 取 Fourier 变换, 得

$$\hat{u}_{tt}(\xi,t)=a^2(i\xi)^2\hat{u}(\xi,t)=-(a\xi)^2\hat{u}(\xi,t),$$

由此得

$$\hat{u}(\xi,t)=c_1(\xi)\cos(a\xi t)+c_2(\xi)\sin(a\xi t)$$

和

$$\hat{u}_t(\xi,t)=-a\xi c_1(\xi)\sin(a\xi t)+a\xi c_2(\xi)\cos(a\xi t).$$

先对 I.C. 施行 Fourier 变换, 得

$$\hat{f}(\xi)=\hat{u}(\xi,0)=c_1(\xi) \quad \text{和} \quad \hat{g}(\xi)=\hat{u}_t(\xi,0)=a\xi c_2(\xi).$$

因此,

$$\hat{u}(\xi,t)=\hat{f}(\xi)\cos(a\xi t)+\hat{g}(\xi)\frac{\sin(a\xi t)}{a\xi}. \tag{27}$$

此时我们想应用卷积定理, 但尚未求出一个函数它的 Fourier 变换是 $\cos(a\xi t)$. 事实上, 没有一个 "普通" 函数具有这种性质. 我们没有去求这样的函数, 而是对 $\hat{f}(\xi)\cos(a\xi t)$ 形式取逆变换:

$$\begin{aligned} [\hat{f}(\xi)\cos(a\xi t)]^{\vee}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\cos(a\xi t)e^{i\xi x}d'\xi \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)(e^{ia\xi t}+e^{-ia\xi t})e^{i\xi x}d'\xi \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)(e^{i(x+at)\xi}d'\xi+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{i(x-at)\xi}d'\xi \\ &= \frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)]. \end{aligned} \tag{28}$$

为求 (27) 中第二项的逆, 可用卷积定理, 因由第 7.1 节例 4 得知

$$\text{如果 } h(x)=\begin{cases} \frac{1}{2a}, & |x|\leqslant at, \\ 0, & |x|>at, \end{cases} \quad \text{则} \quad \hat{h}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(a\xi t)}{a\xi}. \tag{29}$$

则由卷积定理和 (29), 得

$$\left(\hat{g}(\xi)\frac{\sin(a\xi t)}{a\xi}\right)^{\vee}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}g(y)h(x-y)dy=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(y)dy. \tag{30}$$

(28) 和 (30) 相加, 得 (但不是证明)D'Alembert 公式:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(y)dy. \tag{31}$$

还有其他方法得到 (31), 这涉及到 **Dirac delta"函数"**$\delta(x)$. 这不是通常意义下的函数, 因为它表明具有性质: 对任意函数 $f(x)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)dx=f(0). \tag{32}$$

如果 $\delta(x)$ 是常义的函数, 则在单点 $x=0$ 改变 $f(x)$ 为不同的值而不会改变 (32) 的左端, 但右端将会改变. 特别, (32) 的左端不能用通常的方式 (例如, 作为 Riemann 和的极限) 定义积分, 因为被积函数不是常义函数. 而看待 (32) 的左端的一个方式是它只不过是 $f(x)$ 的花哨写法. 换言之, (32) 是 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)dx$ 的定义. 类似地, 对任意实数 c, 定义

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-c)f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(c-x)f(x)dx=f(c). \tag{33}$$

则 (由 (33))$\delta(x-c)$ 的 Fourier 变换为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-c)e^{-ix\xi}d'x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ic\xi}. \tag{34}$$

然后注意到 (表明线性性成立)

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[\delta(x+c)+\delta(x-c)]e^{-ix\xi}d'x=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}(e^{ic\xi}+e^{-ic\xi})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos(c\xi).$$

换言之, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos(c\xi)$ 是 $\frac{1}{2}[\delta(x+c)+\delta(x-c)]$ 的 Fourier 变换. 虽然卷积定理是在某些好的常义函数的情况下证明的, 然而我们注意到由于

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}(\xi)\cos(a\xi t)=\hat{f}(\xi)\frac{1}{2}[\delta(x-at)+\delta(x+at)]^{\wedge}(\xi),$$

故应有

$$\begin{aligned}[\hat{f}(\xi)\cos(a\xi t)]^{\vee}(x) &= \left(f * \frac{1}{2}[\delta(x-at)+\delta(x+at)]\right)(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{1}{2}[\delta(x-y-at)+\delta(x-y+at)]dy \\ &= \frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)].\end{aligned}$$

这又是没有证明最后结果是有效的, 它在第五章中已个别证明了. 注意到 Dirac delta"函数" 允许我们把 (31) 的解写成一个 "积分", 如同我们对热方程所做的 (参看 (12)), 即,

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} [k(x-y,t)f(y) + h(x-y,t)g(y)]dy, \tag{35}$$

其中

$$k(z,t) = \frac{1}{2}[\delta(z-at)+\delta(z+at)] \quad \text{和} \quad h(z,t) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & |z| \leqslant at, \\ 0, & |z| > at. \end{cases}$$

Dirac delta "函数" 属于被称做广义函数或分布的对象类. 分布的术语对处理有关奇异性太强的量, 无法用常义的函数代表的情形是相当方便的. 例如, 发生在一个无穷小时间施加的一个作用力时, 在数量上产生有限的变化的情形. 这样的作用力称为脉冲, 用一个 delta"函数" 来表示, 就如工科学生会很快指出那样.

例 8 通过形式计算求出以下问题解的积分表示:

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_{tt} = a^2 u_{xx} - u, \qquad -\infty < x, \quad t < \infty; \\ &\text{I.C.} \quad u(x,0) = e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad u_t(x,0) = 0. \end{aligned} \tag{36}$$

解 D.E 两边关于 x 取 Fourier 变换, 得

$$\hat{u}_{tt}(\xi,t) = a^2(i\xi)^2\hat{u}(\xi,t) - \hat{u}(\xi,t) \quad \text{或} \quad \hat{u}_{tt}(\xi,t) + (1+a^2\xi^2)\hat{u}(\xi,t) = 0. \tag{37}$$

由于 (37) 是关于 t 的二阶线性常微, 具常系数, 故求得 (37) 的通解由以下给出

$$\hat{u}(\xi,t) = c_1(\xi)\cos(t\sqrt{1+a^2\xi^2}) + c_2(\xi)\sin(t\sqrt{1+a^2\xi^2}),$$

其中 $c_1(\xi)$ 和 $c_2(\xi)$ 是任意函数. 而且

$$\hat{u}_t(\xi,t)=\sqrt{1+a^2\xi^2}\left(-c_1(\xi)\sin(t\sqrt{1+a^2\xi^2})+c_2(\xi)\cos(t\sqrt{1+a^2\xi^2})\right).$$

在 $\hat{u}(\xi,t)$ 和 $\hat{u}_t(\xi,t)$ 的表示式中取 $t=0$ 并利用 I.C., 得

$$c_1(\xi)=\hat{u}(\xi,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2}e^{-i\xi x}dx=e^{-\frac{1}{2}\xi^2},$$

其中已用了第 7.1 节例 6 的结果. 另外,

$$\sqrt{1+a^2\xi^2}c_2(\xi)=\hat{u}_t(\xi,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_t(x,0)e^{-i\xi x}dx=0.$$

因此,

$$\hat{u}(\xi,t)=e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\cos(t\sqrt{1+a^2\xi^2}).$$

最后, 形式应用反演定理, 得积分表示

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(\xi,t)e^{i\xi x}d\xi$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\cos(t\sqrt{1+a^2\xi^2})\cos(\xi x)d\xi, \tag{38}$$

因为 $\hat{u}(\xi,t)$ 是 ξ 的偶函数.(38) 的被积函数关于 x 和 t 的所有偏导数关于 ξ 是绝对可积的. 因此, 通过积分号下求导 (参看附录 3) 可证明 (38) 是 (36) 的有效解. □

注记 存在 Fourier 变换方法不能应用 (甚至不能形式应用)的情况. 考虑

D.E. $u_{tt}=u_{xx}+2x, \quad -\infty<x<\infty, \quad t>0;$

I.C. $u(x,0)=x^2, \quad u_t(x,0)=0.$

在第 5.3 节的定理 1 中, 我们发现, 应用 Duhamel 原理得到解 $u(x,t)=x^2+t^2+xt^2$. 另一方面, 显然不能在 D.E. 的两边关于 x 取 Fourier 变换, 因为 $h(x)=x$ 的 Fourier 变换不存在. $f(x)=x^2$ 的 Fourier 变换也不存在. □

半平面上的 Laplace 方程

下面的结果 (除了唯一性) 是第 6.4 节习题 7 的结论

定理 3 设 $f(x)$, $-\infty < x < \infty$ 是有界连续函数. 则问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0; \\ &\text{B.C.} \quad u(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty \end{aligned} \tag{39}$$

在半平面 $y \geqslant 0$ 上有唯一有界的连续解, 即

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x-s)^2} f(s) ds. \tag{40}$$

注记 公式 (40) 是**上半平面的 Poisson 积分公式**.

公式 (40) 可利用 Fourier 变换求得. 作形式运算, D.E. 关于 x 取 Fourier 变换, 视 y 为常数:

$$(i\xi)^2 \hat{u}(\xi,y) + \hat{u}_{yy}(\xi,y) = 0.$$

把 ξ 看作常数, 该"常微" 的通解是

$$\hat{u}(\xi,y) = c_1(\xi)e^{\xi y} + c_2(\xi)e^{-\xi y}. \tag{41}$$

如果当 $y \to \infty$ 时 $\hat{u}(\xi,y)$ 以指数增长, 我们就不能指望当 $y \to \infty$ 时 $u(x,y)$ 是有界的. 因此, 我们在 $\hat{u}(\xi,y)$ 上施加条件:

$$c_1(\xi) = 0, \quad \xi > 0 \quad 和 \quad c_2(\xi) = 0, \quad \xi < 0.$$

则 (41) 具有形式

$$c_1(\xi)e^{-|\xi|y} + c_2(\xi)e^{-|\xi|y} = c(\xi)e^{-|\xi|y},$$

其中 $c(\xi) = c_1(\xi) + c_2(\xi)$. 利用 B.C. 得到 $\hat{f}(\xi) = \hat{u}(\xi,0) = c(\xi)$. 因此,

$$\hat{u}(\xi,y) = \hat{f}(\xi)e^{-|\xi|y}.$$

由第 7.1 节的例 3, 得 (对固定的 y)

$$e^{-y|\xi|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2y}{y^2+x^2}\right)^{\wedge}(\xi).$$

然后根据卷积定理得到期望的公式 (40). 此外, 这不是 "(40) 是问题 (39) 对 $y \geqslant 0$ 的连续解" 的证明, 但我们至少有了可验证的假定性公式, 就如第 6.4 节中的习题 7. □

例 9 求解问题

$$\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\qquad -\infty<x<\infty,\quad y>0;$$

$$\text{B.C.}\quad u(x,0^+)=f(x)=\begin{cases}0, & \text{如果 } x<-1,\\ 1, & \text{如果 } -1<x<1,\\ 2, & \text{如果 } x>1.\end{cases}$$

解 在本例, 边界函数 $f(x)$ 有一些跳跃不连续点, 在其上函数没有定义. 然而, 如果应用公式 (40), 得

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{y^2+(x-s)^2}f(s)ds\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-1}\frac{0\cdot y}{y^2+(x-s)^2}ds+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{y}{y^2+(x-s)^2}ds\\ &\quad+\frac{1}{\pi}\int_{1}^{\infty}\frac{2y}{y^2+(x-s)^2}ds\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\arctan(\frac{x+1}{y})+\arctan(\frac{x-1}{y})\right)+1,\end{aligned}$$

对 $y>0$ 它是调和函数. 回忆起由 Laplace 方程的极坐标形式 (参看第 6.3 节的命题 1), 对 $x>0$, $v(x,y)=\arctan(y/x)=\theta$ 是调和的. 因此, $v(y,x+1)$ 和 $v(y,x-1)$ 对 $y>0$ 是调和的. 并且我们能容易验证

$$\lim_{y\to 0^+}u(x,y)=\begin{cases}0, & \text{如果 } x<-1,\\ 1, & \text{如果 } -1<x<1,\\ 2, & \text{如果 } x>1.\end{cases}$$

还注意到

$$\lim_{y\to 0^+}u(-1,y)=-\frac{1}{2}+1\quad 和 \quad \lim_{y\to 0^+}u(1,y)=\frac{1}{2}+1.$$

应该注意到根据 (x,y) 在上半平面是如何趋于 $(-1,0)$(或 $(1,0)$) 的, $u(x,y)$ 趋于不同的值. 例如, 设 α 是 $-\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 之间的任意角度. 如果 (x,y) 沿着射线 $(x+1)=\tan(\alpha)y(\ y>0)$ 趋于 $(-1,0)$, 则 $u(x,y)=(\alpha+\arctan(\frac{x-1}{y}))\pi^{-1}+1$ 趋于 $(\alpha-\frac{\pi}{2})\pi^{-1}+1=(\alpha+\frac{\pi}{2})\pi^{-1}$, 当 α 在 $-\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 之间取值时它在 0 和 1 之间取值. □

例 10 考虑问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad -\infty<x<\infty,\quad y>0;\\&\text{B.C.}\quad u(x,0)=e^{-x^2}.\end{aligned}$$

如果 $u(x,y)$ 是唯一连续和有界的解 (40), 则证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)dx=\sqrt{\pi}\quad 对每个\ y\geqslant 0. \tag{42}$$

解 由于 e^{-x^2} 是有界和连续的, 由公式 (40) 得 (对 $y>0$)

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{y^2+(x-s)^2}e^{-s^2}ds. \tag{43}$$

如果 (43) 两边关于 x 积分, 则得

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{y^2+(x-s)^2}e^{-s^2}dsdx. \tag{44}$$

由于被积函数对 $y>0$ 是绝对可积的, 故可交换积分次序. 利用 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}ds=\sqrt{\pi}$(参看第 7.1 节的例 6), 则由 (44) 得到 (42):

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{\pi}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{y^2+(x-s)^2}\Big)e^{-x^2}ds=\frac{y}{\pi}\frac{\pi}{y}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}ds=\sqrt{\pi}.$$

由于 $\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$, 所以 (42) 对 $y=0$ 也成立. □

注记 对 B.C. $u(x,0)=f(x)$, 其中 $f(x)$ 是连续和绝对可积的, 由相同的论证 (参看习题 13) 得到结果 $\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$. □

概要 7.4

1. 偏微的 Fourier 变换法: 一般而言, 对于至少有一个变量无限制的偏微, Fourier 变换可用来找出一个假定性的解, 这种解必须用其他方法来验证. 这种验证是必要的, 因为当 Fourier 变换运用于偏微时就已经不仅假设解存在, 而且还假设解具有应用第 7.2 节和第 7.3 节中的结果所需要的性质. 该方法的成功主要是由于事实: 关于一个变量(比如 x) 的 Fourier 变换把关于该变量的每个偏导数转换成以 $i\xi$ 的代数相乘. 在我们的例子中, 偏微是关于两个变量的未知函数, 所以这些偏微变成关于剩下的变量的常微. 在高维情形 (例如, 对 $u_t=u_{xx}+u_{yy}$)

就得对多个变量取 Fourier 变换来得到常微 (参看第 8.1 节). 当验证一个假定性的解时常常会出现这种情形: 假定性的解在比 Fourier 方法预先假设更广泛的范围内是有效的. 例如, 由下面的公式 (S1) 产生一个有效解, 即使当 $\hat{f}(\xi)$ 不存在 (例如, 当 $f(x) = \cos x$ 或甚至是 x^2).

2. 无限杆的热问题 (定理 1): 设 $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, 是连续的, 且或是有界的或是绝对可积的. 则由下面定义的函数 $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4kt} f(y)dy, & t > 0, \\ f(x) & t = 0, \end{cases} \tag{S1}$$

在区域 $\{(x,t): \ t > 0, \ -\infty < x < \infty\}$ 上是 C^1 的, 在 $\{(x,t): \ t \geqslant 0, \ -\infty < x < \infty\}$ 上连续, 且在 $t > 0$, $-\infty < x < \infty$ 上满足 $u_t = ku_{xx}$. 特别, (S1) 满足问题:

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_t = ku_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ &\text{I.C.} \quad u(x,0) = f(x), \end{aligned} \tag{S2}$$

并具有连续条件(第 7.4 节 (3))(即 $\lim_{(x,t)\to(x_0,0^+)} u(x,t) = u(x_0,0) = f(x_0)$).

3. 无限杆热问题的唯一性: 问题 (S2) 的解没有进一步的假设决不会是唯一的, 因为总可加上 Tychonov 解 (参看例 1) 来获得其他的解. 如果对问题 (S2) 在无穷远处加上一个 "边界条件"

$$\text{"B.C."} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \Big(\max_{0\leqslant t\leqslant T} |u(x,t)| \Big) = 0, \quad \text{对所有的 } T > 0, \tag{S3}$$

则 (S1) 是 (S2) 具 (S3) 的唯一解, 只要 $f(x)$ 连续、绝对可积的以及 $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ (参看定理 2).

4. 基本解: $u_t = ku_{xx}$ 的热核 (也称作源解或基本解) 是

$$H(x-y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-(x-y)^2/4kt}, \quad t > 0.$$

可把 $H(x-y,t)$ 看作由 y 处一初始集中热源产生的时刻 t 在 x 处的温度. 定义 ${}_tH(x) \equiv H(x,t)$, 可把 (S1) 写成 $u(x,t) = ({}_tH * f)(x)$(即热核与初始温度的卷积. 对正的 s 和 t, 通过应用卷积定理 (参看习题 8) 和例 5 后面的注记, 易证 ${}_tH *_s H =_{(s+t)} H$).

5. D'Alembert 公式和上半平面 Poisson 积分公式: 也可利用 Fourier 变换技巧获得无限弦波问题的 D'Alembert 公式

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(r)dr$$

和上半平面的 Poisson 积分公式

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{y^2+(x-s)^2}f(s)ds\quad(y>0).$$

在函数 f 和 g 的适当假设下, 在第 5.2 节和第 6.4 节习题 7 中分别验证这些公式提供了 $u_{tt}=a^2u_{xx}$ 和 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 的解.

练习 7.4

1. (a) 由形式计算验证: 如果

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(t)\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad -\infty<x<\infty,\quad t\geqslant 0,$$

其中 $f(t)=\begin{cases}e^{-1/t^2}, & \text{如果 } t\neq 0,\\ 0, & \text{如果 } t=0,\end{cases}$ 则 $u(x,t)$ 满足热方程 $u_t=u_{xx}$.

(b) 证明 $f^{(n)}(0)=0,\ n=1,2,\cdots$.

提示 考虑当 $t\to 0$ 时, Newton 商 $\frac{f(t)-f(0)}{t}$ 的极限.

2. 求解问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx}+\frac{1}{\sqrt{2kt}}e^{-x^2/(4kt)},\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0;\\ &\text{I.C.}\quad u(x,0)=0.\end{aligned}$$

3. 设 $f(y)$ 是分段连续有界函数 (即, 对某个常数 M, $|f(y)|\leqslant M$).

(a) 证明

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4kt)}f(y)dy\\ &=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}f(x+2s\sqrt{kt})ds\quad(t>0).\end{aligned}$$

(b) 利用 (a) 部分的结果以及附录 3 的控制收敛定理证明: 如果 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则当 $(x,t)\to(x_0,0^+)$ 时 $u(x,t)\to f(x_0)$.

4. 假设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的连续偶函数. 如果 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是绝对可积的, 且当 $x\to\pm\infty$ 时 $f(x)\to 0$, 证明下述问题的唯一连续解 $u(x,t)$ 也是 x 的偶函数:

$$\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx},\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0;$$
$$\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x);$$
$$\text{“B.C.”}\ \lim_{x\to\pm\infty}\Big(\max_{0\leqslant t\leqslant T}|u(x,t)|\Big)=0,\quad \text{对所有的 } T>0.$$

5. 令 $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}s^2}ds$ 表示**正态分布函数**. 验证

$$F(-\infty)=0, F(\infty)=1 \text{和 } F(-x)=1-F(x)$$

6. 令 $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4kt)}f(y)dy,\ t>0$, 其中 $f(y)=1$ 如果 $a\leqslant y\leqslant b$ 以及 $f(y)=0$, 在其他处. 用习题 5 中定义的正态分布函数来表示 $u(x,t)$.

7. (a) 证明 $g(x)$ 是速减函数当且仅当 $\hat{g}(\xi)$ 是速减函数.

提示　利用第 7.2 节的定理 1, 证明 $(\hat{g})^\wedge(x)=g(-x)$.

(b) 对 $t>0$, 令 $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(x-y)^2/(4kt)}f(y)dy$, 其中 $f(x)$ 是在某个有限区间之外恒等于零的连续函数. 对每个固定的 $t>0$, 证明 $u(x,t)$ 是 x 的速减函数, 即使 $f(x)$ 也许不是 C^1 的.

提示　利用第 7.2 节的卷积定理和定理 1 , 并利用 (a) 部分.

(c) 假设在 (b) 部分中, $f(x)$ 是有界, 连续和绝对可积的, 但不在某个有限区间之外等于零. 给出一个例子说明对固定的 $t>0$, $u(x,t)$ 关于 x 未必是速减的.

8. 如例 6, 令 ${}_tH(x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-x^2/(4kt)},\ k,\ t>0$. 利用卷积定理和反演定理证明: 对所有的 $s,\ t>0$, ${}_sH * {}_tH = {}_{(s+t)}H$. 对该结果给出一个物理解释. 用例 6 的方法可能得到相同结果吗?

9. 对 $y>0$, 令 $P_y(x)=\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}$. 利用习题 8 的方法证明: 对 $y,\ z>0$, $P_y * P_z = P_{y+z}$.

10. 通过直接应用 Duhamel 原理 (参看第 3.4 节) 得到例 3 的非齐次热问题的形式解.

11. 利用 Fourier 变换法 (形式上) 求解下述波问题

$$\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx},\quad -\infty<x,\ t<\infty,\quad a\neq 0;$$
$$\text{I.C.}\quad u(x,0)=\frac{2\sin x}{1+x^2},\quad u_t(x,0)=0.$$

提示　不必计算 $f(x)=\frac{2\sin x}{1+x^2}$ 的 Fourier 变换, 但注意到 $\cos(a\xi t)=\frac{1}{2}(e^{ia\xi t}+e^{-i^a\xi t})$.

12. (a) 考虑常微 $y''(t)+\omega^2 y(t)=f(t)$ $(\omega\neq 0)$, 初始条件 $y(0)=0$, $y'(0)=0$. 利用 Leibniz 法则 (参看附录 3) 验证: 如果 $f(x)$ 是连续的, 则该问题的解是

$$y(t)=\frac{1}{\omega}\int_0^t f(s\sin(\omega(t-s))ds.$$

说明由 Duhamel 原理得到该解的简易的推导 (参看第 5.3 节中关于 (25) 的论证).

(b) 利用 (a) 部分, 通过利用形式 Fourier 变换方法求解以下具齐次 I.C. 的非齐次波方程:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx}+h(x,t),\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0.\end{aligned}$$

证明如果 $h(x,t)$ 是 C^1, 则该形式解关于 $-\infty<x<\infty$, $t>0$ 是 C^2, 且满足 D.E. 和 I.C.. 验证 $\lim_{t\to 0^+}u(x,t)=0$.

13. 设 $u(x,y)$ $(y\geqslant 0)$ 是以下问题唯一的连续有界解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad -\infty<x<\infty,\quad y>0;\\&\text{B.C.}\quad u(x,0)=f(x),\end{aligned}$$

其中 $f(x)$ 是连续有界的, 且 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$. 证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx.$$

14. 解 Dirichlet 问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad -\infty<x<\infty,\quad y>0;\\&\text{B.C.}\quad u(x,0^+)=f(x)=\begin{cases}1, & \text{如果}\quad x>0,\\-1, & \text{如果}\quad x<0.\end{cases}\end{aligned}$$

15. 对复数 $z=x+iy$ 和 $a=s+it$, 令 $g(z;a)=-\ln|z-a|+\ln|z-\bar{a}|$. 证明

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}g(z;a)\right|_{t=0}=\frac{2y}{y^2+(x-s)^2}.\qquad (*)$$

注记 函数 g 是上半平面 $y>0$ 的 **Green函数**(参看第 6.4 节的习题 11). 它可解释为由在 xy–平面上点 a 和 $\bar{a}$ 处带相反电荷粒子在 z 点产生的位势. 注意到当 $y=0$ 时 $g(z;a)=0$. 结果 $(*)$ 与第 6.4 节习题 14 中证明的结果类似. 在这两种情形, Dirichlet 问题的 Poisson 核都是 Green 函数的外法向导数 (以 a 为变量), 在边界上取值. 该结果对好的区域成立, 在第 8.6 节对带边紧流形来证明该结果 (至少在形式上).

16. 令

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/4kt}f(y)dy,\quad t>0,$$

其中 $f(x)=\begin{cases}a, & 如果\ y<0,\\ b, & 如果\ y>0,\end{cases}$ a 和 b 是非零常数. 证明 $u(x,t)$ 可表示为以下形式

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{(b-a)}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/\sqrt{4kt}}e^{-s^2}ds,\quad t>0$$

(参看第 3.1 节的习题 12 以及习题 3).

17. (a) 在习题 16 中取 $a=10$ 和 $b=0$. 证明对任意 $t>0$(不论如何小), 对任意 x(不论如何大) 有 $u(x,t)>0$. 得出热方程意味着 (与相对论相反) 热以无限速度扩散.

(b) 假设 $f(x)$ 是有界连续的, 对所有实数 x 是非负的, 并在某处 (可能只在某个小区间) $f(x)>0$. 证明对任意 t 的正值,

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4kt)}f(y)dy$$

对所有的 x 是正的.

§7.5 在有限区间和半无限区间上问题的应用

在本节我们将求解 x 限制在一个有限区间或半无限区间 (例如, $0\leqslant x\leqslant L$ 或 $0\leqslant x<\infty$) 的某些问题. 利用镜像法做过这种问题, 由镜像法这种问题适当地 (取决于 B.C.) 延拓成 x 不受限制的相关问题. 以这种方法, 我们可利用前面的由 Fourier 变换法或由其他方法 (例如用 D'Alembert 公式) 获得的对 x 不受限制的结果. 由于镜像法在第五章已大量应用于波问题, 故将集中在热问题以及 Laplace 方程的 Dirichlet 问题和 Newmann 问题.

先建立一些有关有限区间问题解的存在性问题 (在第三章留下未解决的).

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad t>0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x),\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $f(x)$ 是连续的且 $f(0)=f(L)=0$.

注记 注意到这里我们没要求当 $t=0$ 时 D.E. 成立, 因为没有强调 $f(x)$ 是 C^2 的. 然而, 却要求 $u(x,t)$ 对于 $t \geqslant 0$ 和 $0 \leqslant x \leqslant L$ 是连续的. 这意味着 $u(x,t)$ 不仅对 $t>0$ 必须满足 D.E., 而且必须满足连续性条件 (参看第 7.4 节的 (3))

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0^+)} u(x,t) = f(x_0). \tag{2}$$

接下来证明下面的存在和唯一性定理.

定理 1 设令 $\tilde{f}_o(x)$, $-\infty < x < \infty$, 是 $f(x)$ 在 $-L \leqslant x \leqslant L$ 上的奇延拓 $f_o(x)$ 的周期延拓. 则问题 (1) 满足 (2) 的唯一解是

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4kt)}\tilde{f}_o(y)dy, & t>0, \\ f(x), & t=0. \end{cases} \tag{3}$$

证明 由第 7.4 节的定理 1 已经知道由 (3) 定义的函数 u 是连续的且对 $0 \leqslant x \leqslant L$ 和 $t>0$ 满足 D.E.. 由于 $u(0,t)$ 是奇函数的积分, 故它等于 0. 而且, 由于 $\tilde{f}_o(y)$ 关于 $x=L$ 也是奇的 (即 $\tilde{f}_o(L-y) = -\tilde{f}_o(L+y)$, 所以另一个 B.C. $u(L,t)=0$ 也满足. 唯一性在第 3.2 节的定理 1 和定理 3(对 $\epsilon=0$) 中已证. 这些证明没有要求 $f(x)$ 是 C^2 的, 虽然需要 $u(x,t)$ 在 $t=0$ 处的连续性 (为什么?). □

下面结果表明, 对问题 (1), 形式无穷级数解 (在第四章末证明一般是有效的) 当 $t>0$ 时实际上是等于真正的解 (3)(即形式解对 $t>0$ 是有效的且满足 (2)).

定理 2 (1) 的解 (3) 等于 (对 $t>0$) 收敛级数

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2kt/L^2} \sin\frac{n\pi x}{L} \quad (t>0), \tag{4}$$

其中

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,\ n=1,2,3,\cdots.$$

证明 由第 7.4 节的定理 1 以及通过验证得知, 对每个 $t>0$, (3) 中的 $u(x,t)$ 是 x 的 C^∞ 奇周期函数 (周期为 $2L$). 因此, 由第 4.3 节的定理 1 得到: 对每个 $t>0$, (3) 的 $u(x,t)$ 等于它限制在 $[0,L]$ 上的 Fourier 正弦级数:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L},\quad \text{其中}\quad B_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

可在 $B_n(t)$ 的积分号下求导 (由 Leibniz 法则, 因为 $u(x,t)$ 关于 $t>0$ 是 C^∞):

$$\begin{aligned}B_n'(t)&=\frac{2}{L}\int_0^L u_t(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{2}{L}\int_0^L ku_{xx}(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\\&=-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2B_n(t),\end{aligned}$$

其中已用了 Green 公式. 因此, $B_n(t)=c_ne^{-kn^2\pi^2t/L^2}$, c_n 为某个常数, 剩下来证明 $c_n=b_n$. 首先,

$$\begin{aligned}c_n&=\lim_{t\to0^+}B_n(t)=\lim_{t\to0^+}\frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{2}{L}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^L e^{-(x-y)^2/(4kt)}\sin\frac{n\pi x}{L}\tilde{f}_o(y)dx\right)dy\\&\qquad\qquad(\text{参看附录 3})\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{2}{L}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(0-z)^2/(4kt)}\left(\int_0^L\sin\frac{n\pi x}{L}\tilde{f}_o(x+z)dx\right)dz\\&\qquad\qquad(y=z-x).\end{aligned}$$

现利用事实: 对连续有界函数 $h(z)$,

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x_0-z)^2/(4kt)}h(z)dz=h(x_0),\tag{5}$$

该事实隐含在第 7.4 节的定理 1 中 (为什么?). 注意到 $\frac{2}{L}\int_0^L\sin\frac{n\pi x}{L}\tilde{f}_o(x+z)dx$ 是 z 的连续有界函数 (为什么?). 令 (5) 中的 $h(z)$ 为上述函数, 得到

$$\begin{aligned}c_n&=\lim_{t\to0^+}\frac{2}{L}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(0-z)^2/(4kt)}\left(\int_0^L\sin\frac{n\pi x}{L}\tilde{f}_o(x+z)dx\right)dz\\&=h(0)=\frac{2}{L}\int_0^L\sin\frac{n\pi x}{L}\tilde{f}_o(x+0)dx=\frac{2}{L}\int_0^L\sin\frac{n\pi x}{L}f(x)dx=b_n.\end{aligned}\qquad\square$$

注记 如果 $t=0$, 公式 (4) 可能失效, 因 $f(x)$ 可能不等于它的 Fourier 级数. 如果 $f(x)$ 是连续和分段 C^1 的, 且具有 $f(0)=f(L)=0$, 则由第 4.3 节的定理 1, (4) 甚至对 $t=0$ 也是有效的. □

我们也能证明有限区间上具其他类型 B.C. 和连续初始数据的热方程解的存在性, 唯一性和 Fourier 级数表示的有效性. 我们不希望对所有标准的 B.C. 来做这种证明, 而宁可只考虑环形金属丝的情形, 它以下述问题为其模型:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx},\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0;\\&\text{“B.C.”}\quad u(x+2L,t)=u(x,t);\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x),\end{aligned}\tag{6}$$

其中 $f(x)$ 是任一周期为 $2L$ 的连续周期函数. 周期为 $2L$ 的周期函数自然对应于在一周长为 $2L$ 的圆上有确切定义的函数. 在下面的解 (7) 中, 可以用 “通常” 的 Fourier 级数替换复 Fourier 级数, 如果想这么做的话.

定理 3 问题 (6) 的唯一连续解由以下等价的公式给出: 对 $t>0$,

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4kt)}f(y)dy,\\\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{-n^2\pi^2kt/L^2}e^{-in\pi x/L},\end{cases}\quad(t>0)\tag{7}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-in\pi x/L}dx.$$

证明 由第 7.4 节的定理 1 得知 (7) 中的积分对 $t>0$ 是 C^∞ 且满足 $D.E.$. 它还是周期的. 的确, 积分中以 $x+2L$ 替换 x, 并由公式 $z=y-2L$ 作变量变换得到相同的结果, 因为 $f(y)=z+2L=f(z)$. 因此, (7) 的第一个表示式等于它的 Fourier 级数. 现利用定理 2 的证明中相同的计算, 可确定该 Fourier 级数与 (7) 中的无穷和相同. 另外, 对 $t=0$ 需要有一个不同的公式, 除非 $f(x)$ 是连续和分段 C^1 的. 唯一性在第 3.2 节的例 1 中已经证明; 注意到这个论证不需要 $u(x,t)$ 在 $t=0$ 是 C^2 的. □

半无限杆热问题的多种解答

例 1　求解问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx},\quad 0<x<\infty,\quad t>0.\\&\text{B.C.}\quad u(0^+,t)=0,\\&\text{I.C.}\quad u(x,0^+)=f(x),\end{aligned}\tag{8}$$

其中 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上是连续和绝对可积的, 且 $f(0)=0$. 解唯一吗?

解　令 $f_o(x)$ 表示 $f(x)$ 的奇延拓 (即, 对 $x\leqslant 0$, $f_o(x)=-f(-x)$). 注意到 $f_o(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是连续的, 因为 $f(0)=0$. 而且容易看出 $f_o(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是绝对可积的. 因此, 由第 7.4 节的定理 1 得知函数

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4kt)}f_o(y)dy, & t>0,\\ f_o(x), & t=0,\end{cases}\tag{9}$$

是以下问题的连续解:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx},\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f_o(x).\end{aligned}\tag{10}$$

因通过检验 (9) 得到 $u(0,t)=0$, 故 $u(x,t)$ 不仅满足问题 (8) 的 D.E. 和 I.C., 还满足 B.C.. 或许用 $f(y)$ 来表示 $u(x,t)$ 比用 $f_o(y)$ 来表示更合适. 据此, 把积分 (9) 重新写成以下形式

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\Big(\int_{-\infty}^{0}e^{-(x-y)^2/(4kt)}[-f(-y)]dy+\int_{0}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4kt)}f(y)dy\Big).$$

现如果在第一个积分中利用变量变换 $y=-s$, 交换积分限, 然后用 y 替换过度变量 s, 则得

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{0}^{\infty}\big(e^{-(x-y)^2/(4kt)}-e^{-(x+y)^2/(4kt)}\big)f(y)dy.\tag{11}$$

这表示解作为由在 y 处强度为 $f(y)$ 的集中源和在 $-y$ 处强度为 $-f(y)$ 的集中源产生的基本解的连续叠加. 虽然解 (11) 是非常适于应用, 但解不是唯一的 (参看第 7.4 节例 4 后面的注记), 因为在 $x=\infty$ 没有附加 "B.C.". □

例 2　利用 $f(x)$ 的偶延拓 $f_e(x)$(即, $f_e(x)=f(-x)$, $x<0$), 尝试求解例 1 提出的问题.

解 再次容易验证 $f_e(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是连续和绝对可积的. 因此, 由第 7.4 节的定理 1, 由

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4kt)}f_e(y)dy, & t>0,\\ f_e(x), & t=0.\end{cases}$$

给出的函数是以下问题的连续解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx},\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0;\\ &\text{I.C.}\quad u(x,0)=f_e(x),\end{aligned}$$

且 $u(x,t)$ 还满足例 1 给出的问题 (8) 的 D.E. 和 I.C. . 现由于 $f_e(x)$ 是偶函数, 故可把 $u(x,t)$ 表示成

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_0^{\infty}\left(e^{-(x-y)^2/(4kt)}+e^{-(x+y)^2/(4kt)}\right)f(y)dy,$$

但 $u(x,t)$ 一般不满足 B.C.(例如, 如果 $f(x)>0,\ x>0$, 则 $u(0^+,t)>0$). □

例 3 求解问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx},\quad 0<x<\infty,\quad t>0;\\ &\text{B.C.}\quad u_x(0^+,t)=0;\\ &\text{I.C.}\quad u(x,0^+)=f(x),\end{aligned}$$

其中 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上是连续和绝对可积的.

解 对该问题, 取 $f(x)$ 的偶延拓 $f_e(x)$. 则如同例 1, 得

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_0^{\infty}\left(e^{-(x-y)^2/(4kt)}+e^{-(x+y)^2/(4kt)}\right)f(y)dy.$$

在习题 3 要求读者提供该解验证的细节. □

注记 似乎在例 1 和例 3 中运用的奇延拓或偶延拓的技巧 (即镜像法) 局限于齐次 B.C. 问题. 然而, 这种方法也可用于解在端点 $x=0$ 具指定的依赖时间温度的半无限杆问题 (参看下面的例 5). 首先需要一个有关在 $x=0$ 处有跳跃间断点的适当的奇函数二阶导数的 Fourier 变换的结果 (例 4). □

例 4 令 $g(x)$ 是奇函数, 它在 $(-\infty,\infty)$ 上除了 $x=0$ 之外是 C^2. 假设 $g(0^+)$, $g'(0^+)$ 和 $g''(0^+)$ 存在, 并设 $g(x)$, $g'(x)$ 和 $g''(x)$ 是绝对可积的且当

$x \to \infty$ 时它们趋于零. 则证明

$$(g'')^\wedge(\xi) = -\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\xi g(0^+) - \xi^2 \hat{g}(\xi). \tag{12}$$

换言之, 由于在 $x=0$ 处的可能跳跃间断性, 必须在通常的表示式 $-\xi^2\hat{g}(\xi)$(参看第 7.2 节的推论 1) 中添加一个修正项.

解 因 $g''(x)$ 是奇函数, 故有

$$(g'')^\wedge(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g''(x)e^{-i\xi x}d'x = \int_0^{\infty} g''(x)(e^{-i\xi x} - e^{i\xi x})d'x. \tag{13}$$

利用 $2i\sin(\xi x) = (e^{i\xi x} - e^{-i\xi x})$ 以及 Green 公式, 得

$$\begin{aligned}(g'')^\wedge(\xi) &= -2i\int_0^{\infty} g''(x)\sin(\xi x)d'x \\ &= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}}[g'(x)\sin(\xi x) - g(x)\xi\cos(\xi x)]\Big|_{0^+}^{\infty} + 2i\xi^2\int_0^{\infty} g'(x)\sin(\xi x)d'x,\end{aligned}$$

由此导出 (12), 因 $g(x)$ 是奇函数, 且当 $x \to \infty$ 时 $g(x)$ 和 $g'(x)$ 趋于零. □

例 5 利用例 4 的结果来求以下问题的假定性解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;\\ &\text{B.C.}\quad u(0^+, t) = h(t);\\ &\text{I.C.}\quad u(x, 0^+) = 0,\end{aligned}$$

其中 $h(t)$ 是 $0 \leqslant t < \infty$ 的给定的函数且 $h(0) = 0$.

解 对 $t \geqslant 0$ 定义 $u(0,t) = 0$, 对每个固定的 t, 令 $v(x,t)$ 是 $u(x,t)$ 关于 x 变量的奇延拓. 注意到 $v(0^+,t) = h(t)$, $v(0,t) = 0$ 和 $v(0^-,t) = -h(t)$. 如果 u 满足 D.E., 则 $v_t = v_{xx}$, 除了在 $x=0$ 处可能不成立. 在 D.E. 的两边关于 x 取 Fourier 变换, t 保持不变, 利用例 4 的方法 $(g(x) = v(x,t))$, 形式上得到

$$\begin{aligned}(\hat{v})_t(\xi,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} v_t(x,t)e^{-i\xi x}d'x = \int_{-\infty}^{\infty} v_{xx}(x,t)e^{-i\xi x}d'x \\ &= -\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\xi h(t) - \xi^2\hat{v}(\xi,t),\end{aligned}$$

或

$$(\hat{v})_t(\xi,t) + \xi^2\hat{v}(\xi,t) = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}}\xi h(t). \tag{14}$$

一阶线性常微 (14) 的通解是

$$\hat{v}(\xi,t)=-\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\xi e^{-\xi^2 t}\int_0^t e^{\xi^2 s}h(s)ds+e^{-\xi^2 t}F(\xi),$$

初始条件 $\hat{u}(\xi,0)=0$ 隐含 $F(\xi)\equiv 0$. 于是, 有

$$\hat{v}(\xi,t)=-\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\xi\int_0^t e^{\xi^2(t-s)}h(s)ds. \tag{15}$$

形式利用反演定理以及交换积分次序等, 得

$$\begin{aligned}v(x,t)&=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{v}(\xi,t)e^{i\xi x}d'\xi=\frac{-2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\left(\int_{-\infty}^{\infty}i\xi e^{-\xi^2(t-s)}e^{ix\xi}d'\xi\right)h(s)ds\\&=\frac{-2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-\xi^2(t-s)}\right)^{\vee}(x)h(s)ds\\&=\frac{-2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2(t-s)}}e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}\right)h(s)ds,\end{aligned}$$

其中利用了第 7.1 节的例 6. 简化最后的表达式并回忆起对 $x>0$, $v(x,t)=u(x,t)$, 得到假定性解

$$u(x,t)=\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}h(s)ds,\quad x,\ t>0. \tag{16}$$

我们仍然只证明了: 如果问题的解存在, 并具有为了上述形式处理是有效的所需要的所有性质, 则该解由 (16) 给出. 尽管如此, 可直接验证 (16) 满足 D.E, 满足 $u(x,0^+)=0$ 和 (如在下面例子所验证的) 满足 $u(0^+,t)=h(t)$. □

例 6 $u(x,t)$ 由 (16) 给出, 证明, 不管表示形式, 对 $t>0$, 有 $u(0^+,t)=h(t)$(未必是 0). 利用事实:

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-ay}dy=\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \tag{17}$$

该事实经由变量变换 $y=\frac{1}{2}x^2$ 容易证明.

解 在 (16) 中把积分变量 s 变换成 $y=\frac{x^2}{(t-s)}$, 于是 $dy=\frac{x^2}{(t-s)^2}ds$. 则得 (参看附录 3)

$$u(0^+,t)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{x^2/t}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{1}{4}y}h(t-\frac{x^2}{y})dy=\frac{h(t)}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{1}{4}y}dy,$$

由 $a=\frac{1}{4}$ 的 (17), 上式为 $h(t)$. □

例 7 利用在例 1 和例 5 中求得的解来解问题:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = u_{xx},\quad x>0,\quad t>0;\\&\text{B.C.}\quad u(0^+,t)=h(t);\\&\text{I.C.}\quad u(x,0^+)=f(x),\end{aligned}\tag{18}$$

其中 $h(t)$ 和 $f(x)$ 是连续的, 且 $f(x)$ 是绝对可积的.

解 由于 D.E., B.C. 和 I.C. 都是线性的, 故叠加原理表明 (18) 的解完全就是由例 1 和例 5 求得的解之和

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_0^\infty\left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}-e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}}\right)f(y)dy\\&+\frac{x}{\sqrt{4\pi}}\int_0^t\frac{1}{(t-y)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4(t-y)}}h(y)dy.\end{aligned}$$

□

例 8 给出以下问题的物理解释

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx},\quad x>0,\quad t>0;\\&\text{B.C.}\quad u_x(0^+,t)=au(0^+,t);\\&\text{I.C.}\quad u(x,0^+)=g(x),\end{aligned}\tag{19}$$

其中 a 是正常数, $g(x)$[①]是给定的连续函数. 求出一个假定性解并讨论使假定性解是有效的条件.

解 有一半无限杆, 它在每个截面 x 的初始温度由函数 $g(x)$ 给定. B.C. 意味着热量以与杆的端点的温度 $u(0^+,t)$ 成正比的变化率经由该端点流出. 在实际中当端点绝热不完善或热接触不好时经常出现这种边界条件 (参看第 3.3 节末尾前的讨论). 为求一个假定性解, 我们再作 (19) 的解的所有假设 (包括存在性), 这些假设为使我们能进行以下的步骤是必须的. 令 $v(x,t)=u_x(x,t)-au(x,t)$. 则 (19) 的 B.C. 变成 $v(0^+,t)=0$, 这是例 1 考虑的情形. 假设 u 是 C^3 的, g 是 C^1 的, 故有 v 是 C^2 的, 且 v 满足问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad v_t = kv_{xx},\quad x>0,\quad t>0;\\&\text{B.C.}\quad v(0^+,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad v(x,0^+)=g'(x)-ag(x)=f(x).\end{aligned}\tag{20}$$

(注意到 $v_t=u_{xt}-au_t=k(u_{xxx}-au_{xx})=kv_{xx}$.) 由例 1, (20) 的解是

$$v(x,t)=\int_0^\infty B(x,y,t)f(y)dy,\tag{21}$$

① 原文误为 $f(x)$.——译者

其中

$$B(x,y,t) \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\left(e^{-(x-y)^2/(4kt)} - e^{-(x+y)^2/(4kt)}\right),\ t>0.$$

因 v 由 (21) 给出, 故可解一阶常微 $u_x - au = v$ 来得到 u, 于是得到

$$u(x,t) = -e^{ax}\int_x^{\infty} e^{-ar}v(r,t)dr, \tag{22}$$

该解不是最一般的解, 但是唯一的不随 x 的增加迅速增长的解. 由 (21) 和 (22), 得 (先形式上交换积分次序)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -e^{ax}\int_0^{\infty}\int_x^{\infty} e^{-ar}B(r,y,t)drf(y)dy \\ &= -e^{ax}\int_0^{\infty}\int_x^{\infty} e^{-ar}B(r,y,t)dre^{ay}\frac{d}{dy}[e^{-ay}g(y)]dy \\ &= e^{ax}\int_0^{\infty} e^{-ay}\frac{d}{dy}\left(e^{ay}\int_x^{\infty} e^{-ar}B(r,y,t)dr\right)g(y)dy, \end{aligned}$$

其中已经关于 y 分部积分了, 并注意到 $B(r,0,t) = B(r,\infty,t) = 0$ 以及假设 $e^{-ar}g(y)$ 对于 $y \geqslant 0$ 是有界的. 施行导数, 有

$$u(x,t) = \int_0^{\infty}\left(\int_x^{\infty} e^{a(x-r)}[B_y(r,y,t) + aB(r,y,t)]dr\right)g(y)dy, \tag{23}$$

这就是 (19) 的假定性解. 对 $t>0$, 可验证内部积分 (记作 $I(x,y,t)$) 以及它关于 x 和 t 的所有偏导数存在, 且是 y 的速减函数. 在以下设 $g(x)$ 是 $x>0$ 的连续函数, 并假设对所有充分大的 x, $|g(x)| < x^p$, p 为某个正常数. 为得出对 $t>0$, (23) 定义了一个 C^{∞} 函数 $u(x,t)$, 则反复利用 Leibniz 法则. 此外, 利用 Green 公式, 可直接验证 $I_t(x,y,t) = kI_{xx}(x,y,t)$, 由此得知 (19) 满足 D.E.$u_t = ku_{xx}$. 通过应用 Leibniz 法则以及利用事实 $B(0,y,t) = B_y(0,y,t) = 0$, 可明确地验证对 $t>0$, $u_x(0,t) = au(0,t)$. 最后, 用相当大的努力, 可证明对 $x>0$, $u(x,0^+) = g(x)$. (首先, 可证明对任意正数 x, $\lim_{t\downarrow 0}\int_0^{\infty} I(x,y,t)dy = 1$.) 因此, 不管在导出假定性解的过程中作了什么假设, 在 $g(x)$ 是连续的并当 $x\to\infty$ 时 g 的增长不会比某个多项式迅速的假设下, (23) 向我们提供了问题 (19) 的解. □

Fourier 正弦变换和 Fourier 余弦变换

当求解 x 限制在半无限区间 $[0,\infty)$ 的问题时, 作为不同于镜像法的另一种方法, 可利用下面定义的 Fourier 正弦变换和 Fourier 余弦变换. 如同 Fourier 正

弦级数和 Fourier 余弦级数与通常的 Fourier 级数的联系那样, Fourier 正弦变换和 Fourier 余弦变换与通常的 Fourier 变换具有相同的联系.

定义 令 $f(x)$ 是定义在 $0 \leqslant x < \infty$ 的函数. 则 $f(x)$ 的 **Fourier正弦变换**是

$$\hat{f}_s(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin(\xi x) dx,$$

$f(x)$ 的 **Fourier余弦变换** 是

$$\hat{f}_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos(\xi x) dx,$$

只要这些积分存在.

如果 $f_e(x)$ 和 $f_o(x)$ 表示实函数 $f(x)$ 的偶延拓和奇延拓, 则

$$\hat{f}_c(\xi) = (f_e)^\wedge(\xi) \quad 和 \quad -i\hat{f}_s(\xi) = (f_o)^\wedge(\xi).$$

因此可由正弦变换和余弦变换求解的问题通过考虑延拓也能用通常的 Fourier 变换求解. 就像 Fourier 正弦级数和 Fourier 余弦级数的理论要转化到通常的 Fourier 级数理论一样,Fourier 正弦变换和 Fourier 余弦变换的理论要转化到通常的 Fourier 变换理论. 特别, 可利用通常的 Fourier 变换反演定理来建立关于单边变换的相关反演公式 $(x > 0)$:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_s(\xi) \sin(\xi x) d\xi \tag{24}$$

和

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_c(\xi) \cos(\xi x) d\xi, \tag{25}$$

其中假设 $f(x)$ 在 $[0, \infty)$ 上是分段 C^1 和绝对可积的.

在下个例子中阐述了公式 (25) 在第一象限 $0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$ 上 Laplace 方程的一个问题中的用处. 然而, 也可通过把问题偶延拓成上半平面, 然后利用 Poisson 积分公式 (参看第 7.4 节的 (40), 以 $f_e(x)$ 替换 $f(x)$) 立刻获得该解, Poisson 积分公式由通常的 Fourier 变换方法得到的.

例 9 求以下问题假定性解

$$\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<\infty,\quad 0<y<\infty;$$

$$\text{B.C.}\quad \begin{cases} u_x(0^+,y)=0,\\ u(x,0^+)=f(x),\end{cases}$$

这里假设 $u(x,y)$ 是有界的, 且 $u(\infty,y)=u_x(\infty,y)=0,\ 0<y<\infty$.

解 进行形式演算, 对 D.E. 关于 x 取 Fourier 余弦变换, y 保持不变. 这里选择 Fourier 余弦变换是由 B.C. 决定的. (读者可考虑为什么 Fourier 正弦变换是不合适的理由.) 我们得

$$(u_{yy})_c^{\wedge}(\xi,y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}u_{yy}(x,y)\cos(\xi x)dx=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}u_{xx}(x,y)\cos(\xi x)dx,$$

其中 $(u_{yy})_c^{\wedge}(\xi,y)$ 表示 u_{yy} 的 Fourier 余弦变换. 经两次分部积分, 得

$$\begin{aligned}
&-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}u_{xx}(x,y)\cos(\xi x)dx\\
=&-\sqrt{\frac{2}{\pi}}u_x(x,y)\cos(\xi x)\bigg|_{x=0}^{\infty}\\
&-\xi\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}u_x(x,y)\sin(\xi x)dx\\
=&-\xi\sqrt{\frac{2}{\pi}}u(x,y)\sin(\xi x)\bigg|_{x=0}^{\infty}+\xi^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}u(x,y)\cos(\xi x)dx=\xi^2\hat{u}_c(\xi,y),
\end{aligned}$$

其中用了 B.C. 和假设 $u(\infty,y)=u_x(\infty,y)=0$. 因此,

$$(u_{yy})_c^{\wedge}(\xi,y)-\xi^2\hat{u}_c(\xi,y)=0,$$

并作形式假设 $(u_{yy})_c^{\wedge}=(\hat{u}_c)_{yy}$, 则该关于 y 的常微的通解是

$$\hat{u}_c(\xi,y)=c_1(\xi)e^{\xi y}+c_2(\xi)e^{-\xi y},$$

其中 $c_1(\xi)$ 和 $c_2(\xi)$ 是 ξ 的任意函数. 由于所给问题要求 $u(x,y)$ 是有界的, 所以假设对 $\xi>0,\ c_1(\xi)=0$ 以及对 $\xi<0,\ c_2(\xi)=0$. 于是

$$\hat{u}_c(\xi,y)=c(\xi)e^{-|\xi|y},$$

其中 $c(\xi)=c_1(\xi)+c_2(\xi)$. 特别, $\hat{u}(\xi,0)=c(\xi)$. 由第二个 B.C., 得

$$c(\xi)=\hat{u}_c(\xi,0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos(\xi x)dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos(\xi x)dx=\hat{f}_c(\xi).$$

因此, $\hat{u}_c(\xi,y)=\hat{f}(\xi)e^{-|\xi|y}$, 然后由单边变换的反演定理 (参看 (25)), 得

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}(\xi)e^{-|\xi|y}\cos(\xi x)d\xi\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(s)\cos(\xi s)ds\right)e^{-\xi y}\cos(\xi x)d\xi.\end{aligned}$$

如果交换积分次序, 则关于 ξ 的积分可直接计算, 且导致的解与通过在第 7.4 节的 Poisson 积分公式 (40) 中以 f 的偶延拓替换 f 获得的解相同. □

概要 7.5

1. 有限杆或半无限杆的热问题: 有限杆或半无限杆的热问题的解由镜像法, 可从第 7.4 节关于无限杆的定理 1 的解获得. 这种通过镜像法来完成的做法, 与有限弦问题的解由第五章的无限弦的 D'Alembert 公式获得的方式相同. 在每个端点都是绝热或都保持在 0 的情形, 初始温度延拓为无限杆, 必须选择在每个等于 0 的端点是奇函数, 在每个绝热的端点是偶函数的延拓. 在例 5 中, 用镜像法解答了在端点具指定的依赖时间的温度的热问题, 这表明镜像法不局限于齐次 B.C..

2. 端点保持 0 的有限杆问题的情形 (定理 1): 考虑有限杆问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad t>0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x),\end{aligned}\tag{S1}$$

其中 $f(x)$ 是连续的, 且 $f(0)=f(L)=0$, 我们要求 $u(x,t)$ 对 $t\geqslant 0$ 和 $0\leqslant x\leqslant L$ 是连续的. 这意味着 $u(x,t)$ 对 $t>0$ 不仅要满足 D.E. 还要满足连续性条件

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0^+)}u(x,t)=f(x_0).\tag{S2}$$

定理 1 令 $\tilde{f}_o(x)$, $-\infty < x < \infty$ 是 $f(x)$ 在 $-L \leqslant x \leqslant L$ 上的奇延拓 $f_o(x)$ 的周期延拓. 则问题 (S1) 满足 (S2) 的唯一解是

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4kt)} \tilde{f}_o(y)dy, & t > 0, \\ f(x), & t = 0. \end{cases} \tag{S3}$$

3. 形式解的有效性: 像 (S3) 的积分公式, 在确定第 4.3 节讨论过的有限杆热问题的形式无穷 Fourier 级数解时是有益的. 该积分公式表明解存在且对 $t > 0$ 实际上是 C^∞ 的, 即使连续的初始温度分布有角点. 证明对每个 $t > 0$, 该积分公式解的 Fourier 级数与形式解相同 (参看定理 2 和它的证明), 构成了形式解有效性的证明. 我们没用验证由叠加原理获得的形式解, 已经看到这种解对无穷级数可能不成立. 当 $t = 0$, 形式解会不收敛到 $f(x)$, 但连续性条件 (S2) 成立, 因 (S2) 对等价的积分解成立.

4. Fourier 正弦变换和 Fourier 余弦变换: 令 $f(x)$ 是定义在 $0 \leqslant x < \infty$ 的函数. 则 $f(x)$ 的 **Fourier正弦变换**和 **Fourier余弦变换**分别由以下给出

$$\hat{f}_s(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\sin(\xi x)dx \quad \text{和} \quad \hat{f}_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\cos(\xi x)dx,$$

只要这些积分存在. 当 $f(x)$ 是实值函数时, 有

$$\hat{f}_c(\xi) = (f_e)^\wedge(\xi) \quad \text{和} \quad -i\hat{f}_s(\xi) = (f_o)^\wedge(\xi).$$

可利用通常 Fourier 变换的反演定理来建立这些单边变换相关的反演公式 ($x > 0$)

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_s(\xi)\sin(\xi x)d\xi$$

和

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_c(\xi)\cos(\xi x)d\xi,$$

其中假设 $f(x)$ 在 $[0, \infty)$ 上是分段 C^1 和绝对可积的. 例 9 阐述了 Fourier 余弦变换在解第一象限中的 Dirichlet/Neumann 问题的用处, 虽然直接运用镜像法更简单.

练习 7.5

1. 求以下问题的解:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx},\quad x>0,\quad t>0;\\&\text{B.C.}\quad u_x(0^+,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0^+)=f(x),\end{aligned}$$

其中 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上是分段 C^1 和绝对可积的, 且当 $x\to\infty$ 时 $f(x)\to 0$.

2. 由形式计算求以下问题一个形式解:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = u_{xx},\quad x>0,\quad t>0;\\&\text{B.C.}\quad u_x(0^+,t)=h(t);\\&\text{I.C.}\quad u(x,0^+)=0,\end{aligned}$$

其中 $h(t)$ 是适当的连续函数.

提示 寻求是 x 的偶函数的解 $u(x,t)$(参看例 4, 例 5 和例 6).

3. 求以下问题的一个假定性解:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = u_{xx},\quad 0<x<\infty,\quad t>0;\\&\text{B.C.}\quad u_x(0^+,t)=h(t);\\&\text{I.C.}\quad u(x,0^+)=f(x),\end{aligned}$$

其中 $h(t)$ 和 $f(x)$ 是适当的连续函数.

4. (a) 利用 Fourier 变换方法 (形式上的), 求以下具齐次 I.C. 和 B.C. 的非齐次热方程的假定性解:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx}+h(x,t),\quad 0<x<\infty,\quad t>0;\\&\text{B.C.}\quad u_x(0^+,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0^+)=0.\end{aligned}$$

(b) 证明 (a) 部分求得的假定性解也可直接通过形式利用 Duhamel 原理得到.

提示 关于 Duhamel 原理参看第 3.4 节.

5. 利用镜像法和 Fourier 正弦变换各求出以下问题的一个解:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x,\ y<\infty;\\&\text{B.C.}\quad \begin{cases}u(0^+,y)=0;\\u(x,0^+)=f(x),\end{cases}\end{aligned}$$

其中假设 $u(x,y)$ 是有界的, 且 $u(\infty,y)=u_x(\infty,y)=0,\ 0\leqslant y<\infty$. 证明这两个解实际上是相同的.

6. (a) 如同例 5, 求以下波问题假定性解的积分公式:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{tt}=u_{xx},\quad 0<x<\infty,\ t>0;\\&\text{B.C.}\quad u(0^+,t)=h(t);\\&\text{I.C.}\quad u(x,0^+)=u_t(x,0^+)=0,\end{aligned}$$

其中假设 $u(\infty,t)=u_x(\infty,t)=0,\ t>0$. 可利用事实: 常微 $y''(t)+\xi^2y(t)=g(t)$ 满足 $y(0)=y'(0)=0$ 的解由

$$y(t)=\frac{1}{\xi}\int_0^t g(s)\sin(\xi(t-s))ds$$

给出 (参看第 7.4 节的习题 12).

(b) 通过假设具形如 $u(x,t)=F(x+t)+G(x-t)$ 的解, 得到更简单的假定性解: 如果 $x<t,\ u(x,t)=h(t-x)$, 如果 $x\geqslant t,\ u(x,t)=0$. 在什么条件下该解对 $t,\ x>0$ 是 D.E. 的 C^2 解?

提示 从 I.C. 注意到, 对 $x>0$ 有 $F(x)+G(x)=0$ 和 $F'(x)-G'(x)=0$. 因此, $u(x,t)=0,\ 0<t<x$. 现利用 B.C.$h(t)=u(0,t)=G(-t)$ 来确定 $G(s),\ s<0$, 从而得到 $u(x,t),\ 0<x<t$.

(c) 当 $h(t)\equiv 1,\ t>0$ 时, 明确地求出 (a) 中解答的值.

7. 以 $u_x(0^+,t)=h(t),\ t>0$ 替换习题 6 中的 B.C.. 用你选择的方法求由此产生的问题的假定性解 $u(x,t)$. 对 $h(t)$ 什么假设下, $u(x,t)$ 对 $x>0$ 和 $t>0$ 是 D.E. 的 C^2 解?

8. (a) 求解以下第一象限 Dirichlet 问题, 其中 $g(y)$ 和 $f(x)$ 是给定的有界连续函数, 且 $g(0)=f(0)=0$. 只有一个解吗?

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x,\ y<\infty;\\&\text{B.C.}\quad \begin{cases}u(0^+,y)=g(y),\\u(x,0^+)=f(x).\end{cases}\end{aligned}$$

(b) 通过由第一象限到上半平面的共形映照 $F(z)=z^2$ 把 (a) 部分的问题转化成上半平面的问题来解原问题.

9. (a) 利用 Fourier 变换求以下问题的假定性解 $u(x,t)$, 其中 b 是常数:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{+}bu_x=h(x,t),\quad -\infty<x,\ t<\infty;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x).\end{aligned}$$

(b) 对 $h(x,t)$ 和 $f(x)$ 什么假设下, (a) 部分中求得的解是 D.E. 的 C^1 解?

补充 (反演定理)

令 $f(x)$, $-\infty < x < \infty$ 是在以下意义下的分段 C^1 函数: $f'(x)$ 在每个有限区间上除去有限多个点是存在且连续的, $f'(x)$ 在这些点处具有有限跳跃. 对这样的函数, 在每点 x_0, 下面极限存在

$$f(x_0^+) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) \quad \text{和} \quad f(x_0^-) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x),$$

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0} \quad \text{和} \quad f'(x_0^-) = \lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0}. \tag{1}$$

反演定理 令 $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, 是分段 C^1 和绝对可积的(即$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$). 则对任意 x_0, 有

$$\frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)] = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x_0} d'\xi \equiv \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x_0} d'\xi. \tag{2}$$

证明 (2) 的右边是

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} d'x \right) e^{i\xi x_0} d'\xi = \lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-R}^{R} e^{-i\xi(x-x_0)} d'\xi \right) d'x, \tag{3}$$

其中积分次序的交换是允许的, 因为 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$ 和 $\int_{-R}^{R} |e^{-i\xi(x-x_0)}|d\xi = 2R < \infty$ (参看附录 3). 现对 $x \neq x_0$,

$$\int_{-R}^{R} e^{-i\xi(x-x_0)} d'\xi = \frac{e^{iR(x-x_0)} - e^{-iR(x-x_0)}}{i(x-x_0)} = \frac{2\sin(R(x-x_0))}{x-x_0},$$

当 $x = x_0$ 时左边等于 $2R$. 由于 $d'\xi d'x \equiv \frac{1}{2\pi} d\xi dx$, 故 (3) 变成

$$\lim_{R\to\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{\infty} f(x) \frac{\sin(R(x-x_0))}{x-x_0} dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x_0} f(x) \frac{\sin(R(x-x_0))}{x-x_0} dx \right).$$

则只需证明第一项的极限是 $\frac{1}{2} f(x_0^+)$ 以及第二项的极限是 $\frac{1}{2} f(x_0^-)$. 由于证明是类似的, 故只证明

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{\infty} f(x) \frac{\sin(R(x-x_0))}{x-x_0} dx = \frac{1}{2} f(x_0^+). \tag{4}$$

由变量变换 $z = x - x_0$, (4) 中的积分变成

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x_0+z)\frac{\sin(Rz)}{z}dz. \tag{5}$$

在下面的引理中将证明 $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(Rz)}{z}dz = \frac{1}{2}$. 用 $f(x_0^+)$ 相乘, 得

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x_0^+)\frac{\sin(Rz)}{z}dz = \frac{1}{2}f(x_0^+).$$

因此,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x_0+z)\frac{\sin(Rz)}{z}dz - \frac{1}{2}f(x_0^+)\right|\\ =&\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\infty [f(x_0+z)-f(x_0^+)]\frac{\sin(Rz)}{z}dz\right| \equiv I.\end{aligned} \tag{6}$$

需要证明 (6) 中的 I 当 $R\to\infty$ 时趋于 0. 对任意常数 $A>1$, 有

$$\begin{aligned}I \leqslant &\left|\frac{1}{\pi}\int_0^A \frac{f(x_0+z)-f(x_0^+)}{z}\sin(Rz)dz\right|\\ &+\frac{1}{\pi}\int_A^\infty |f(x_0+z)|\left|\frac{\sin(Rz)}{z}\right|dz + \frac{1}{\pi}|f(x_0^+)|\left|\int_A^\infty \frac{\sin(Rz)}{z}dz\right|.\end{aligned} \tag{7}$$

令 W, J 和 K 分别代表表示式 (7) 的右端第 1,2 和 3 项. 因 $z \geqslant A > 1$, 故在 J 有 $|\frac{\sin(Rz)}{z}| \leqslant 1$, 由此得, 当 $A\to\infty$ 时

$$J < \frac{1}{\pi}\int_A^\infty |f(x_0+z)|dz = \frac{1}{\pi}\int_{A+x_0}^\infty |f(y)|dy \to 0,$$

因假设 $\int_{-\infty}^\infty |f(x)|dx < \infty$. 于是, 通过取 A 充分大可使 J 任意小. 现经变量变换 $x = Rz$, 得

$$K = \frac{1}{\pi}|f(x_0^+)|\left|\int_{AR}^\infty \frac{\sin x}{x}dx\right|,$$

于是, 对任一 $A>1$ 的值, 可通过取 R 足够大使得 K 为期望的那样小 (为什么? 参看下面的引理). 最后, 由于 (1) 中的极限存在, 故第 4.2 节的 Riemann-Lebesgue 引理隐含: 当 $R\to\infty$ 时, W 趋于 0, 于是完成了 (4) 的证明 (也可参看第 7.1 节的习题 10). 由于关于 x_0^- 对应于 (4) 的结果可以同样的方法证明, 故期望的公式 (2) 成立. □

引理

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx \equiv \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

证明 注意到对任一 $x>0$, $\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{x}$. 因此, 对 $0<\epsilon<R$ 有

$$\int_\epsilon^R \frac{\sin x}{x}dx = \int_\epsilon^R\int_0^\infty e^{-\lambda x}\sin x d\lambda dx = \int_0^\infty\int_\epsilon^R e^{-\lambda x}\sin x dx d\lambda, \tag{9}$$

其中交换积分次序是允许的, 因为 $|e^{-\lambda x}\sin x|\leqslant e^{-\lambda x}$ 和 $e^{-\lambda x}$ 在带形 $\lambda\geqslant 0$, $\varepsilon\leqslant x\leqslant R$ 中是可积的. 现有

$$\int_\epsilon^R e^{-\lambda x}\sin x dx = \mathrm{Im}\left(\int_\epsilon^R e^{(i-\lambda)x}dx\right) = \mathrm{Im}\left(\left.\frac{e^{(i-\lambda)x}}{i-\lambda}\right|_\epsilon^R\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{(i-\lambda)R}-e^{(i-\lambda)\epsilon}}{i-\lambda}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{(i+\lambda)[e^{(i-\lambda)\epsilon}-e^{(i-\lambda)R}]}{1+\lambda^2}\right). \tag{10}$$

注意到

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_0^\infty\int_R^\infty e^{-\lambda x}\sin x dx d\lambda\right| = \lim_{R\to\infty}\int_0^\infty\left|\mathrm{Im}\left(\frac{(i+\lambda)e^{(i-\lambda)R}}{1+\lambda^2}\right)\right|d\lambda$$

$$\leqslant \lim_{R\to\infty}\int_0^\infty e^{-\lambda R}d\lambda = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}=0.$$

因此, 由于该极限为零, 故利用 (9), 有

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^\infty \frac{\sin x}{x}dx &= \lim_{R\to\infty}\left(\int_0^\infty\int_\epsilon^\infty e^{-\lambda x}\sin x dx d\lambda - \int_0^\infty\int_R^\infty e^{-\lambda x}\sin x dx d\lambda\right)\\ &= \int_0^\infty\int_\epsilon^\infty e^{-\lambda x}\sin x dx d\lambda = \int_0^\infty \mathrm{Im}\left(\frac{(i+\lambda)e^{(i-\lambda)\epsilon}}{1+\lambda^2}\right)d\lambda\\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda\epsilon}\cos\epsilon}{1+\lambda^2}d\lambda + \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda\epsilon}\sin\epsilon}{1+\lambda^2}d\lambda.\end{aligned} \tag{11}$$

现有

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda\epsilon}\cos\epsilon}{1+\lambda^2}d\lambda$$

$$+\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda\epsilon}\lambda\sin\epsilon}{1+\lambda^2}d\lambda. \tag{12}$$

因 $\lambda e^{-\lambda\epsilon} \leqslant \frac{1}{\epsilon e}$, 故对任意常数 $a>0$, 有

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\left|\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda\epsilon}\lambda\sin\epsilon}{1+\lambda^2}d\lambda\right| \\
&\leqslant \lim_{\epsilon\to 0}\left|\int_0^a \frac{e^{-\lambda\epsilon}\lambda\sin\epsilon}{1+\lambda^2}d\lambda\right| + \lim_{\epsilon\to 0}\left|\int_a^\infty \frac{e^{-\lambda\epsilon}\lambda\sin\epsilon}{1+\lambda^2}d\lambda\right| \\
&\leqslant \lim_{\epsilon\to 0}\sin\epsilon\int_0^a \frac{\lambda}{1+\lambda^2}d\lambda + \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\sin\epsilon}{\epsilon}\frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan a\right] = \frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan a\right].
\end{aligned}$$

因 a 可任意大, 故 (12) 中最后的极限等于零. 剩下来证明

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda\epsilon}\cos\epsilon}{1+\lambda^2}d\lambda = \frac{\pi}{2} \quad 或 \quad \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty \frac{1-e^{-\lambda\epsilon}\cos\epsilon}{1+\lambda^2}d\lambda = 0. \tag{13}$$

为此,

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty \frac{1-e^{-\lambda\epsilon}\cos\epsilon}{1+\lambda^2}d\lambda = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_0^a \frac{1-e^{-\lambda\epsilon}\cos\epsilon}{1+\lambda^2}d\lambda + \int_a^\infty \frac{1-e^{-\lambda\epsilon}\cos\epsilon}{1+\lambda^2}d\lambda\right) \\
&\leqslant \lim_{\epsilon\to 0}[1-e^{-a\epsilon}\cos\epsilon]\int_0^a \frac{1}{1+\lambda^2}d\lambda + \int_a^\infty \frac{1}{1+\lambda^2}d\lambda = \frac{\pi}{2} - \arctan a.
\end{aligned}$$

因 a 可任意大, 故 (13) 得证. □

注记 如果愿意接受以下计算中的交换积分次序的有效性的话, 则由形式计算很快得到该引理.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda x}\sin x d\lambda dx \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda x}\sin x dx d\lambda = \int_0^\infty \frac{1}{1+\lambda^2}d\lambda = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

注意到由 Green 公式 (参看第 4.1 节) 立刻得到

$$\lambda^2\int_0^\infty e^{-\lambda x}\sin x dx + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\sin x dx = 1\ (\lambda>0),$$

此提供了上述计算中的第三个等式. 因此, 该引理证明的复杂性只是由于需要证明交换积分次序的有效性. 即使是对那些熟悉 Lebegue 积分理论 (或熟悉附录 2 和附录 3 的内容) 的读者, 这种有效性的证明也不是立刻能得出的, 因为 $\exp(-\lambda x)$ 在第一象限 $0 \leqslant \lambda,\ x < \infty$ 不是可积的. 的确,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx d\lambda &= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda}d\lambda = \lim_{R\to\infty}\int_{\frac{1}{R}}^R \frac{1}{\lambda}d\lambda \\
&= \lim_{R\to\infty}(\ln R - \ln\frac{1}{R}) = \lim_{R\to\infty} 2\ln R = \infty.
\end{aligned}$$

然而, $e^{-\lambda x}\sin x$ 在带形 $0 \leqslant x \leqslant R,\ 0 \leqslant \lambda < \infty$ 上是绝对可积的, 因

$$\int_0^R \int_0^\infty e^{-\lambda x}|\sin x| d\lambda dx \leqslant \int_0^R \int_0^\infty x e^{-\lambda x} d\lambda dx = R.$$

则 Fubini 定理 (参看附录 2) 使以下计算中的交换积分次序是有效的

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x}dx &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R\int_0^\infty e^{-\lambda x}\sin x d\lambda dx \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^\infty\int_0^R e^{-\lambda x}\sin x dx d\lambda \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^\infty \left(\frac{1}{\lambda^2+1} - \frac{e^{-R\lambda}[\lambda\sin R + \cos R]}{\lambda^2+1}\right) d\lambda \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2+1} d\lambda = \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

其中由控制收敛定理 (参看附录 3) 可在积分号下取极限. 在该注记前的证明虽然较长, 但它有不依赖附录 2 和附录 3 内容的优点. 最后, 我们提及一下, 该引理也可用复围线积分 (如果读者知道该内容) 来证明, 这种证明最终把积分转化到半单位圆周长度的一半 (即, $\frac{\pi}{2}$). □



第八章　高维情形的偏微

在前面的章节, 我们已经考虑了一维热流 ($u_t = ku_{xx}$) 和波的传播 ($u_{tt} = a^2u_{xx}$) 以及二维稳态温度, 静电学和流体流 ($u_{xx} + u_{yy} = 0$). 由于我们生活在具三个空间维数的世界, 所以在高维情形检验对应的结果也是重要的, 在高维情形会提出很多非常相关的初边值问题. 由于在偏微研究和应用中的很多技巧和中心思想已经在处理低维情形中展现过, 把我们所学到的延拓到高维情形在概念上没有像想象中那么困难. 特别, 分离变量技巧,(齐次线性方程的) 叠加原理以及 Fourier 级数和 Fourier 变换的某些方面都可施行到高维情形.

由于坐标系的多样性, 大多数的难点本质上只是在技巧上. 例如, 在一直线上本质上只有一个标准坐标系, 但 (除了笛卡儿坐标或直角坐标) 在平面上有极坐标, 在空间有柱坐标和球坐标. 坐标的选取取决于所考虑区域的对称性 (如果有的话). 当变量可分离时, 某些导致的常微会是难以求解的. 的确, 某些解不能用初等函数 (例如, 正弦函数, 余弦函数, 指数函数, 等等) 来表示, 需引入新的特殊函数, 像 Bessel 函数. 遗憾的是在很多处理中, 由于注意力放在特殊的函数而不是 (偏微的) 的乘积解上, 在求解过程背后的主要思想被掩盖了, 这些乘积解是一些常微的解乘在一起的结果. 乘积解与时间无关的部分通常是 Laplace 算子 $\triangle$ 对于所考虑区域的特征函数. 特殊函数主要是用来构造满足 B.C. 的特征函数的. 一旦每个初始条件表示为特征函数的线性组合 (即, 写成一个特征函数的展开式), 则求得初边值问题的解通常是简单的. 特征函数展开 (参看 4.4 节)

构成了定义在光滑 (可能是弯曲) 的称为流形的多维空间上函数的 Fourier 级数的自然推广, 即使在其上, 比如由于缺少对称性, 变量分离是不可行的.

在 8.1 节用直角坐标考虑标准的高维热方程, 波方程和 Laplace 方程, 利用多重 Fourier 级数和多重 Fourier 变换求解这些偏微的初边值问题. 在 8.2 节引入 Laplace 算子的特征值和特征函数的统一概念, 主要在矩形上. 还证明在矩形上适当函数的特征函数展开 (多重 Fourier 级数) 的一致收敛定理. 第 8.3 节讨论了用球坐标表示的标准的偏微. 以几何上自然方式定义了球面上的 Laplace 算子, 以及引入它的特征函数 (称为球面调和函数). 在第 8.4 节证明了球面上的 C^2 函数 f 的特征函数展开式 (f 的 Laplace 级数) 一致收敛到 f. 在其他的问题中, 我们还研究在一个实体球内的热流以及振动气球的波问题. 在第 8.5 节考虑很多特殊函数, 如 Bessel 函数以及它们在解柱内热问题和表示圆形膜振动方式中的用处. 还求解了用量子力学描述氢原子中的电子能级的 Schrödinger 方程. 在第 8.6 节引入 n–维空间中光滑 k–维流形概念, 并在这种对象上定义了 Laplace 算子. 在最后一节中, 叙述了有关特征函数的性质, 它们在解的构造以及在流形上标准偏微问题的 Green 函数的应用结果. 虽然这里没有对这些结果都给出证明, 但提供了它们证明的参考文献.

§8.1 高维的偏微 —— 直角坐标

本节我们重新引出与应用密切相关的高维热方程, 波方程和 Laplace 方程. 在本节仅限于矩形或长方体上的边值问题, 所以用直角坐标. 由于这些技巧 (分离变量, 叠加原理和 Fourier 级数) 都是相当熟悉的, 所以可包括很多领域.

矩形和长方体上的热方程

在第 6.1 节已求得在一均匀介质中二维热流温度 $u(x, y, t)$ 可遵循的唯一可能的二阶线性偏微是

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy}), \tag{1}$$

其中 k 是正常数 (热的扩散率) 且假设无热源. 在矩形情形, 产生了在矩形的边上温度保持 0 的 (1) 的最简单的初边值问题, 即

$$\begin{array}{ll} \text{D.E.} & u_t = k(u_{xx}+u_{yy}), \quad 0 \leqslant x \leqslant L,\ 0 \leqslant y \leqslant M,\ t>0; \\ \text{B.C.} & \begin{cases} u(x,0,t)=0, & u(x,M,t)=0, \\ u(0,y,t)=0, & u(L,y,t)=0; \end{cases} \\ \text{I.C.} & u(x,y,0)=f(x,y), \end{array} \tag{2}$$

其中 $f(x,y)$ 是连续函数, 在矩形的边界上等于零, 并不明显地要求 $u(x,y,t)$ 对 $t \geqslant 0$ 是连续的. 进行分离变量, 把乘积解 $u(x,y,t)=X(x)Y(y)T(t)$ 代入 (1), 并把 t 从 x 和 y 中分离出来, 得

$$\frac{T''}{kT} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = b, \tag{3}$$

b 为某个常数. 于是, 对某个常数 c, 有

$$\frac{X''}{X} = b - \frac{Y''}{Y} = c \quad 或 \quad \begin{cases} X''-cX=0, \\ Y''+(c-b)Y=0. \end{cases} \tag{4}$$

由 B.C. $u(0,y,t)=0$ 和 $u(L,y,t)=0$, 只有当 $c=c_n \equiv -(n\pi/L)^2$ 且 $X(x)$ 是 $\sin(n\pi x/L)$, $n=1,2,3,\cdots$ 的常数倍时才能避免零解. 类似地, 由 B.C. $u(x,0,t)=0$, $u(x,M,t)=0$ 和方程 $Y''+(c-b)Y=0$ 得到 $c-b=(m\pi/M)^2$ 和 $Y(y)$ 必是 $\sin(m\pi y/M)$, $m=1,2,3,\cdots$ 的常数倍. $-b$ 的可能值, 记作 $\lambda_{n,m}$, 由以下给出

$$\lambda_{n,m} \equiv \left(\frac{m\pi}{M}\right)^2 - c_n = \pi^2\left(\left(\frac{n}{L}\right)^2 + \left(\frac{m}{M}\right)^2\right), \quad m,\ n=1,2,3,\cdots. \tag{5}$$

由 (3), 有 $T''=kbT$, 因此 (2) 的 D.E. 和 B.C. 乘积解族由以下的常数倍组成

$$u_{n,m}(x,y,t) = e^{-\lambda_{n,m}kt} \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi y}{M}, \quad m,n=1,2,3,\cdots. \tag{6}$$

由于 (2) 的线性齐次 D.E. 和 B.C., 可应用叠加原理得到 D.E. 和 B.C. 的更一般

的解:

$$u(x,y,t)=\sum_{n,m=1}^{N} b_{n,m}u_{n,m}(x,y,t)=\sum_{n,m=1}^{N} b_{n,m}e^{-\lambda_{n,m}kt}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}, \tag{7}$$

其中整数 n 和 m 独立地从 1 取到某个有限数 N. 当 $t=0$ 时,

$$u(x,y,0)=\sum_{n,m=1}^{N} b_{n,m}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}. \tag{8}$$

如果 (2) 中的初始温度 $f(x,y)$ 具有这种形式, 则 (7) 是 (2) 的解. 当然, 不是每个给定的 $f(x,y)$ 会正好具有这种形式. 然而, 可期望适当好的 $f(x,y)$ 可由形如 (8) 的和来逼近, 比如在某个正实验误差之内. 有一个最大值原理 (可用第 3.2 节中最大值原理相同的方式叙述和证明) 隐含 D.E. 和 B.C. 的两个解相差不会超过它们在 $t=0$ 时的最大值. 因此, 在初始逼近中的误差不随 t 的增加而变大. 此外, (2) 的唯一性由最大值原理保证. 和 (8) 称为 (有限) 二重 Fourier 正弦级数. 更精确地, 有以下定义

矩形 $(0\leqslant x\leqslant L,\ 0\leqslant y\leqslant M)$ 上函数 $f(x,y)$ 的**二重Fourier正弦级数**是表示式

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} b_{n,m}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}, \tag{9}$$

其中

$$b_{n,m}=\frac{4}{LM}\int_0^M\int_0^L f(x,y)\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}dxdy,\quad m,n=1,2,3,\cdots, \tag{10}$$

只要这些积分存在.

在第 8.2 节将讨论二重 Fourier 级数以及一些它们的收敛性质. 如果初始温度的二重 Fourier 正弦级数存在, 则 (2) 的形式解由 (7) 给出, 其中 N 由 ∞ 替换, $b_{n,m}$ 由 (10) 给出. 如果除了有限项之外 $b_{n,m}$ 都等于零, 则该形式解显然是精确的 C^∞ 解. 下面的证明将会困难得多: 如果函数 $f(x,y)$ 是在闭矩形上连续,

在矩形的边上为零, 则形式解对 $t>0$ 定义了 (1) 的一个真实解, 当 $t\to 0^+$ 时该解可连续延拓到 $f(x,y)$. 回忆起这种类型的结果在一维情形通过把解表示成经适当延拓的初始温度与热方程的基本解的卷积给出过证明 (参看第 7.5 节的定理 1). 在问题 (2) 的情形, 令 $\tilde{f}_{o,o}(x,y)$ 是 $f(x,y)$ 的唯一的延拓 (到整个 xy–平面), 关于 x 是奇的和周期的 (以 $2L$ 为周期), 且关于 y 是奇的和周期的 (以 $2M$ 为周期). 则问题 (2) 唯一的连续解可写成以下形式

$$u(x,y,t)=\frac{1}{4\pi kt}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2]/(4kt)}\tilde{f}_{o,o}(\bar{x},\bar{y})d\bar{x}d\bar{y},\ t>0, \quad (11)$$

其中当 $t=0$ 时, $u(x,y,0)=f(x,y)$. 解 (11) 通过镜像法获得 (参看第 7.5 节), 由镜像法把初始温度 $f(x,y)$ 适当延拓 (取决于 B.C.) 到定义在整个平面上的 $F(x,y)$. 则

$$u(x,y,t)=\frac{1}{4\pi kt}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2]/(4kt)}F(\bar{x},\bar{y})d\bar{x}d\bar{y}\quad (t>0), \qquad (12)$$

是在整个平面上热方程初值问题的解. 解 (12) 经形式利用二维 Fourier 变换方法得到, 我们将在 8.2 节讨论二维 Fourier 变换. (注意到 $4\pi kt$ 的平方根在 (12) 中不出现, 因为热方程的二维源解结果是 x 方向和 y 方向两个一维源解的乘积.) 如同一维情形 (参看第 7.4 节的定理 1), 利用 Leibniz 法则可直接证明, 对 $t>0$, (12) 是热方程的 C^∞ 解, 只要 $F(x,y)$ 是连续和有界的 (或绝对可积的). 在这种情形, 如同前面, 也可证明当 $t\to 0^+$ 时, (12) 连续地延拓到初始温度 $F(x,y)$(当然有 $F(x,y)=f(x,y),\ 0\leqslant x\leqslant L,\ 0\leqslant y\leqslant M$).

在选取延拓 $F(x,y)$ 时, 根据 B.C.(如同在 (2) 中) 解要求为零的每条边上, 我们用奇延拓, 而对于是绝热的每条边上 (即, 在 B.C. 中, 如果温度 $u(x,y,t)$ 的偏导数 [沿该边的法线方向] 是 0; 参看下面的例 2) 我们用偶延拓.

例 1 求解问题

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_t=2(u_{xx}+u_{yy}),\quad 0\leqslant x\leqslant 3,\quad 0\leqslant y\leqslant 5,\quad t\geqslant 0;\\
&\text{B.C.}\quad \begin{cases} u(x,0,t)=0, & u(x,5,t)=0,\\ u(0,y,t)=0, & u(3,y,t)=0;\end{cases}\qquad (13)\\
&\text{I.C.}\quad u(x,y,0)=\cos[\pi(x+y)]-\cos[\pi(x-y)]+\sin(2\pi x)\sin\tfrac{3\pi y}{5}.
\end{aligned}$$

解 我们可用 (7), 只要 I.C. 能写成 (8) 的形式. 利用公式 $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$, 得到期望的形式

$$u(x,y,0)=-2\sin\frac{3\pi x}{3}\sin\frac{5\pi y}{5}+\sin\frac{6\pi x}{3}\sin\frac{3\pi y}{5}.$$

由于这是 (8) 的形式, 其中 $L=3$, $M=5$, 故可用 $k=2$ 的 (7), 得

$$u(x,y,t)=-2e^{-4\pi^2 t}\sin(\pi x)\sin(\pi y)+e^{-218\pi^2 t/25}\sin(2\pi x)\sin\frac{3\pi y}{5}.$$

虽然将会不方便, 也可把解写成 (11) 的形式, 其中 $\tilde{f}_{o,o}(x,y)=\cos(\pi(x+y))-\cos(\pi(x-y))+\sin(2\pi x)\sin\frac{3\pi y}{5}$, 它具有所要求的函数奇性和周期性. □

类似地可处理另一种类型的边界条件, 其中一些边上是绝热的而另一些边上保持在 0, 如下面例子所表示的.

例 2 解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=k(u_{xx}+u_{yy}),\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad 0\leqslant y\leqslant M,\quad t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad\begin{cases}u(x,0,t)=0, & u_y(x,M,t)=0,\\ u_x(0,y,t)=0, & u_x(L,y,t)=0;\end{cases}\\&\text{I.C.}\quad u(x,y,0)=\cos\tfrac{2\pi x}{L}\sin\tfrac{3\pi y}{2M}.\end{aligned}\tag{14}$$

如何处理具形式 $u(x,y,0)=f(x,y)$ 的一般的 I.C.?

解 这时边 $y=0(\ 0\leqslant x\leqslant L)$ 保持为零, 而其他的三条边是绝热的. 与通常一样, 寻求 D.E. 满足 B.C. 的乘积解, 然后考虑 I.C.. 分离变量导出关于 X 和 Y 的方程 (4). B.C. $u_x(0,y,t)=0$ 和 $u_x(L,y,t)=0$ 隐含 $X(x)$ 是 $\cos\frac{n\pi x}{L}$, $n=0,1,2,\cdots$ 的常数倍. B.C. $u(x,0,t)=0$ 和 $u_y(x,M,t)=0$ 隐含 $Y(y)$ 是 $\sin((m+\frac{1}{2})\pi y/M)$, $m=0,1,2,\cdots$ 的常数倍 (参看第 3.3 节的例 2). 满足 (14)[①]的 D.E. 和 B.C. 的乘积解族由以下的常数倍组成

$$u_{n,m}(x,y,t)=\exp\left(-\left[\left(\frac{n}{L}\right)^2+\left(\frac{m+\frac{1}{2}}{M}\right)^2\right]\pi^2 kt\right)\cos\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{(m+\frac{1}{2})\pi y}{M},\tag{15}$$

$n,\ m=0,1,2,\cdots$. 在更一般初始温度 $f(x,y)$ 的情形, 要尝试把 $f(x,y)$ 写成函数 $u_{n,m}(x,y,0)$ 的线性组合, 然后 $u_{n,m}(x,y,t)$ 相同的线性组合将给出 $t>0$ 的解. 对眼下处理的问题, 注意到 I.C. 只是 $u(x,y,0)=u_{2,1}(x,y,0)$. 因此

$$u(x,y,t)=u_{2,1}(x,y,t)=\exp\left(-\left[\left(\frac{2}{L}\right)^2+\left(\frac{3}{2M}\right)^2\right]\pi^2 kt\right)\cos\frac{2\pi x}{L}\sin\frac{3\pi y}{2M}.$$

①原文误为 (10).——译者

如果 I.C. 是 $u(x,y,0)=f(x,y)$, 其中 $f(x,y)$ 在闭矩形上是连续的且在边 $y=0$ 上为零, 但不必是 (15) 中的 $u_{n,m}(x,y,0)$ 的有限线性组合, 则可证 (参看第 7.5 节定理 2) 当 $t>0$ 时, 以下是 D.E. 和 B.C. 的解:

$$u(x,y,t)=\sum_{n,m=1}^{\infty}c_{n,m}u_{n,m}(x,y,t), \tag{16}$$

其中

$$c_{n,m}=\frac{4}{LM}\int_0^M\int_0^L f(x,y)\cos\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{(m+\frac{1}{2})\pi y}{M}dxdy. \tag{17}$$

当 $t\to 0^+$ 时该解连续延拓到 $f(x,y)$, 但牵涉到导数的 B.C. 将不成立, 除非 $f(x,y)$ 满足这些 B.C.. 等价地, 当 $t>0$, 有积分公式:

$$u(x,y,t)=\frac{1}{4\pi kt}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2]/(4kt)}F(\bar{x},\bar{y})d\bar{x}d\bar{y},\ t>0, \tag{18}$$

其中 $F(x,y)$ 是 $f(x,y)$ 的唯一延拓 (到整个 xy–平面), 关于 x 是奇的和周期的 (以 $2L$ 为周期), 关于 y 是周期的 (以 $4M$ 为周期), 关于 $y=M$ 是偶的, 关于 $y=0$ 是奇的 (参看第 5.3 节例 2, 其中用了这种延拓). □

容易把上述的考虑推广到三维热流情形. 与其讨论一般的情形我们不如来考虑一个例子.

例 3 一边长为 1 的立方体, 具热扩散常数 k, 最初处于常数沸点温度 100°C, 突然 (在 $t=0$) 被置于 0°C 的冰水中. 求作为 t 的函数在方体中心的温度, 并证明当 t 充分大时该温度 $\approx 6400\pi^{-3}e^{-3\pi^2kt}$. 估计最小的 t 使得在该中心的真实温度与此近似在 10% 之内 (比如, 在 $5760\pi^{-3}e^{-3\pi^2kt}$ 与 $7040\pi^{-3}e^{-3\pi^2kt}$ 之间).

解 设该方体由 $0\leqslant x,\ y,\ z\leqslant 1$ 表示. 鉴于 B.C. $u(0,y,z)=0,\ u(1,y,z)=0,\ u(x,0,z)=0,\cdots$, 由分离变量得到热方程 $u_t=k(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$ 关于这些 B.C. 的以下乘积解族:

$$u_{n,m,p}(x,y,z,t)=e^{-(m^2+n^2+p^2)\pi^2kt}\sin(n\pi x)\sin(m\pi y)\sin(p\pi z).$$

当 x, y 或 z 等于 0 或 1 时, 所有这些解为 0. 因此, 这些解的叠加

$$u(x,y,z,t)=\sum_{n,m,p=1}^{\infty}B_{n,m,p}u_{n,m,p}(x,y,z,t)$$

当 $t=0$ 时在方体的各个面上不可能是 100. 于是, 我们作形式处理. 假设严格在方体的内部, 有

$$100=\sum_{n,m,p=1}^{\infty}B_{n,m,p}u_{n,m,p}(x,y,z,0). \tag{19}$$

注意到这些函数 $u_{n,m,p}(x,y,z,0)$ 在方体中在以下意义下是正交的

$$\begin{aligned}&\int_0^1\int_0^1\int_0^1 u_{n,m,p}\ (x,y,z,0)u_{N,M,P}(x,y,z,0)dxdydz\\ &\qquad=\begin{cases}0, & \text{如果 } n\neq N \text{ 或 } m\neq M \text{ 或 } p\neq P,\\ \frac{1}{8}, & \text{如果 } n=N,\ m=M \text{ 和 } p=P.\end{cases}\end{aligned}$$

则形式地由该正交性和 (19), 得

$$\begin{aligned}B_{n,m,p}&=8\int_0^1\int_0^1\int_0^1 100\sin(n\pi x)\sin(m\pi y)\sin(p\pi z)dxdydz\\ &=\frac{800}{\pi^3}\frac{1}{n}\big[1-(-1)^n\big]\frac{1}{m}\big[1-(-1)^m\big]\frac{1}{p}\big[1-(-1)^p\big]\\ &=\begin{cases}\frac{6400}{\pi^3 nmp}, & \text{如果 } n,\ m \text{ 和 } p \text{ 是奇数},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\end{aligned}$$

因此, 形式上有

$$u(x,y,z,t)=\frac{6400}{\pi^3}\sum_{n,m,p\ \text{奇数}}^{\infty}\frac{1}{nmp}e^{-(m^2+n^2+p^2)\pi^2kt}\sin(n\pi x)\sin(m\pi y)\sin(p\pi z). \tag{20}$$

虽然形式上得到这个公式, 但可证明对 $t>0$, (20) 定义热方程一个 C^∞ 解, 且对 (x,y,z) 严格在方体的内部, 有 $u(x,y,z,0^+)=100$. 计算该解在方体中心的

值, 有

$$u(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},t) = \frac{6400}{\pi^3}\sum_{n,m,p\text{ 奇数}}^{\infty}\frac{1}{nmp}e^{-(m^2+n^2+p^2)\pi^2kt}(-1)^{(n+m+p-3)/2}$$

$$= \frac{6400}{\pi^3}\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q\left(\sum_{\substack{n+m+p=2q+3\\ n,m,p\text{ 奇数}}}^{\infty}\frac{1}{nmp}e^{-(m^2+n^2+p^2)\pi^2kt}\right). \tag{21}$$

关于 q 的求和是交错的, 但括号内的表示式, 记作 $A(q,t)$, 当 q 增加时不总是单减的 (例如,$A(0,0)=1$ 和 $A(1,0)=1$).(读者也许希望判断 $A(q,0)$ 对 $q\geqslant 1$ 是否关于 q 是单减的.) 因此, 无法得出一个部分和的误差不超过后面一项. 然而, 即刻我们将会求得一正数 t_0, 使得对 $t>t_0$, $A(q,t)$ 关于 q 总是单减的, 于是对 $t>t_0$, 这第一项 $e^{-3\pi^2kt}$ 与整个和 (21) 相差不超过第二项的数值 $e^{-11\pi^2kt}$. 对 $t>\ln 10/(8\pi^2k)\approx 0.02916/k$, 该第二项小于第一项的 10%. 因此对 $t>0.02916/k$, 只用第一项来近似 (21) 由此产生的误差小于 10%, 如果现在要确定的 t_0 的值小于 $0.02916/k$ 的话. 为求 t_0, 注意到满足 $n+m+p=2q+3$ 的每组三元数 (n,m,p) 产生和数为 $2(q+1)+3$ 的三元数 (即, $(n+2,m,p)$, $(n,m+2,p)$, $(n,m,p+2)$). 然而, 在这种过程中, 指数中的因子 $(n^2+m^2+p^2)$ 至少增加 6 (例如, $(n+2)^2>n^2+2n+4\geqslant n^2+6$). 因此, 考虑所有的三元数组, 得到 $A(q+1,t)<3e^{-6\pi^2kt}A(q,t)$. 因此, $A(q,t)$ 必关于 q 严格递减, 只要 $3e^{-6\pi^2kt}<1$ 或 $t>\ln 3/(6\pi^2k)\approx 0.0186/k=t_0$. 于是, 由于 $t_0<0.02916/k$, 故在中心的温度将在 $6400\pi^{-3}e^{-3\pi^2kt}$ 的 10% 之内, 只要 $t>0.02916/k$. 可验证, 当 $t=0.02916/k$ 时, 不论 k 为何值, 该近似温度 $\approx 87°\mathrm{C}$. □

注记 函数 (20) 以下面的做法可用一个积分公式来表示. 把空间分解成方体, 这些方体的顶点的坐标都是整数. 令 $F(x,y,z)$ 是这样的函数: 在方体 $0<x,\ y,\ z<1$ 内为 1, 在该方体的每个面上为 0, 在与该方体相邻且有一个公共面的方体严格内部为 -1. 重复这种方式, 使 $F(x,y,z)$ 在整个空间有定义, $F(x,y,z)$ 在每个方体内部为 1 或 -1 且在公共面上为 0(平均值). 通过应用 Fourier 变换技巧, 对 $t>0$ 得到另一解:

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2+(z-\bar{z})^2]/(4kt)}\cdot F(\bar{x},\bar{y},\bar{z})d\bar{x}d\bar{y}d\bar{z}. \tag{22}$$

解的这种形式似乎计算起来更困难. 然而, 如果取 $x = y = z = \frac{1}{2}$, 且把积分区域限制在有限的长方体 B, $-1 < \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} < 2$(包括 27 个单位方体并以原方体作为中心) 之内的话, 对小的 $t > 0$(即, 当例 3 中的近似是不好的时刻) 可得到 $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t)$ 很精确的近似. 对小的 t, 这种新的近似将是好的, 因为对 $x = y = z = \frac{1}{2}$ 和充分小的正数 t, (22) 的被积函数在 B 外非常小. 在 B 上的积分可用数值计算或用好的正态分布表帮助下计算. □

长方体上的 Laplace 方程

也许长方体上 Laplace 方程最简单类型的问题是

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant L,\ 0 \leqslant y \leqslant M,\ 0 < z < P; \\ &\text{B.C.} \quad \begin{cases} u(x,y,0) = f(x,y), \quad u(x,y,P) = g(x,y), \\ u(x,y,z) = 0, \quad \text{在面 } x = 0,\ x = L,\ y = 0,\ y = M \text{ 上}, \end{cases} \end{aligned} \tag{23}$$

其中 f 和 g 是给定的在矩形 $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant y \leqslant M$ 上连续的函数, 它们在该矩形的边界上为零. 我们寻求 D.E. 在长方体内的 (C^2) 解, 该解在满足 B.C. 的意义下连续延拓到长方体的边界. 熟悉的方法是利用分离变量来求满足齐次 B.C. 的那些乘积解 $X(x)Y(y)Z(z)$, 然后利用叠加原理, 取这些乘积解的线性组合使其满足 B.C. $u(x,y,0) = f(x,y)$ 和 $u(x,y,P) = g(x,y)$. 把乘积 $X(x)Y(y)Z(z)$ 代入 D.E. 得到 $\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0$. 这些项中的任一项不可能被消除留下剩余两项的和式, 除非被消除项是常数 (为什么?). 根据过去的经验, 我们知道为使 $X(x)$ 满足 B.C. $X(0) = X(L) = 0$, 必有 $X(x)$ 是 $\sin\frac{n\pi x}{L}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ 的常数倍, 类似地, $Y(y)$ 是 $\sin\frac{m\pi y}{M}$, $m = 1, 2, 3, \cdots$ 的常数倍. 对每对 (n, m), 关于 Z 的方程是 $Z'' - \pi^2[(n/L)^2 + (m/M)^2]Z = 0$. 考虑到 (可能的) 非齐次 B.C. 是给定在面 $z = 0$ 和 $z = P$ 上这样的事实, 表示关于 Z 的方程的通解的一个很方便的方式是

$$Z_{n,m}(z) = \frac{1}{\sinh(P\sqrt{\lambda_{n,m}})}\left(a_{n,m}\sinh((P - z)\sqrt{\lambda_{n,m}}) + b_{n,m}\sinh(z\sqrt{\lambda_{n,m}})\right),$$

其中 $\sqrt{\lambda_{n,m}} = \pi\sqrt{(n/L)^2 + (m/M)^2}$. 因此, 齐次 D.E. 和 B.C. 更一般的解是

$$u(x,y,z) = \sum_{n,m=1}^{N} Z_{n,m}(z) \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi y}{M}. \tag{24}$$

注意到在面 $z=0$ 和 $z=P$ 上, 有

$$u(x,y,0) = \sum_{n,m=1}^{N} a_{n,m} \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi y}{M}$$

和

$$u(x,y,P) = \sum_{n,m=1}^{N} b_{n,m} \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi y}{M}.$$

因此, 如果 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 分别由这些有限二重 Fourier 正弦级数给出, 则问题 (23) 的一个解由 (24) 给出. 当 $f(x,y)$ 或 $g(x,y)$ 不是有限二重 Fourier 正弦级数时, 我们有形式解, 用很大的努力可证明该形式解严格在长方体内是有效的并可连续延拓到长方体各面上指定的值. 对 Dirichlet 问题 (23)(或更一般地, 在 $\mathbf{R}^n$, $n=1,2,3,\cdots$ 中任一有界开集上的 Dirichlet 问题) 有最大值最小值原理, 可像第 6.4 节定理 1 的证明那样来给予证明. 于是, 边界数据的合理的近似导出在内部合理的解.

例 4 求常数 c, 使得以下 Neumann 问题有解, 并求出这样的解. 解唯一吗?

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.} \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \quad 0 < x,\ y,\ z < \pi. \\
&\text{B.C.} \quad \begin{cases} u_x(0,y,z) = u_x(\pi,y,z) = 0, & u_y(x,0,z) = u_y(x,\pi,z) = 0, \\ u_z(x,y,0) = 0, & u_z(x,y,\pi) = c + 4\sin^2 x\cos^2 y. \end{cases}
\end{aligned} \tag{25}$$

解 很快可验证 D.E. 满足齐次 B.C. 的乘积解具有形式:

$$u_{n,m}(x,y,z) = a_{n,m}\cosh\left(\sqrt{n^2+m^2}z\right)\cos(nx)\cos(my),\ n,m = 0,1,2,\cdots.$$

应用叠加原理产生更一般的解

$$u(x,y,z) = \sum_{n,m=0}^{N} a_{n,m}\cosh\left(\sqrt{n^2+m^2}z\right)\cos(nx)\cos(my), \tag{26}$$

对此, 有

$$u_z(x,y,\pi)=\sum_{n,m=0}^{N}a_{n,m}\sqrt{n^2+m^2}\sinh\left(\sqrt{n^2+m^2}\pi\right)\cos(nx)\cos(my). \tag{27}$$

注意到最后的表达式是具有零常数项 (即 $\sqrt{0^2+0^2}=0$) 的有限二重余弦级数. (25) 中非齐次 B.C. 可写成有限二重余弦级数的形式:

$$u_z(x,y,\pi)=(c+1)-\cos(2x)+\cos(2y)-\cos(2x)\cos(2y). \tag{28}$$

如果 $c=-1$, 则可相比较 (27) 和 (28) 的系数得到解

$$u(x,y,z)=\frac{\cosh(2z)[\cos(2y)-\cos(2x)]}{2\sinh(2\pi)}-\frac{\cosh(z\sqrt{8})\cos(2x)\cos(2y)}{\sqrt{8}\sinh(\pi\sqrt{8})}.$$

可对该解加上任一常数得到又一个解. 为理解为何必须取 $c=-1$, 回忆起 $u(x,y,z)$ 可解释为稳态温度函数, 它只有当通过这些面的热能净流量是 0 时才存在. 因此, $c+4\sin^2x\cos^2y$ 在面 $z=\pi$ 上的积分必须为零, 所以 $c=-1$. □

矩形上的波方程

令 $u(x,y,t)$ 是绷在矩形 $0\leqslant x\leqslant L,\ 0\leqslant y\leqslant M$ 上均匀薄膜的横向位移 (在 z 方向). 利用与第 6.1 节相同的论证, 导出支配这种位移的唯一的线性二阶偏微是二维波方程 $u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})$ 是可能的, 其中 a 是受到干扰的薄膜中传播的常速度. 关于 $u(x,y,t)$ 合适的初边值问题是

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\quad 0\leqslant x\leqslant L,\ 0\leqslant y\leqslant M,\ -\infty<t<\infty;\\
&\text{B.C.}\quad \begin{cases}u(x,0,t)=0, & u(x,M,t)=0,\\ u(0,y,t)=0, & u(L,y,t)=0;\end{cases}\\
&\text{I.C.}\quad u(x,y,0)=f(x,y),\quad u_t(x,y,0)=g(x,y).
\end{aligned} \tag{29}$$

分离变量过程与二维热问题类似, 除了以 $T''-ba^2T=0$ 代替 $T'-bkT=0$.

如前, $-b$ 的允许值是 (5) 的 $\lambda_{n,m}$, 因此, 得到乘积解集合

$$u_{n,m}(x,y,t)=\left(a_{n,m}\cos(at\sqrt{\lambda_{n,m}})+b_{n,m}\right)\sin(at\sqrt{\lambda_{n,m}})\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}, \tag{30}$$

其中

$$\lambda_{n,m}=\pi^2\left(\left(\frac{n}{L}\right)^2+\left(\frac{m}{M}\right)^2\right),\quad n,m=1,2,3,\cdots. \tag{31}$$

如果初始位移和初始速度是有限二重 Fourier 正弦级数

$$f(x,y)=\sum_{n,m=1}^{N}A_{n,m}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M},\quad g(x,y)=\sum_{n,m=1}^{N}B_{n,m}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M},$$

则问题 (29) 的解是

$$u(x,y,t)=\sum_{n,m=1}^{N}u_{n,m}(x,y,t),\ \text{其中}\ a_{n,m}=A_{n,m}\ \text{和}\ b_{n,m}=\frac{B_{n,m}}{a\sqrt{\lambda_{n,m}}}. \tag{32}$$

由 (30) 定义的函数 $u_{n,m}(x,y,t)$ 称为矩形膜的 (n,m) 级**谐波**. 该谐波的**频率**是单位时间实现的振动的次数, 即

$$\nu_{n,m}=\frac{a}{2\pi}\sqrt{\lambda_{n,m}}=\frac{a}{2}\sqrt{\left(\frac{n}{L}\right)^2+\left(\frac{m}{M}\right)^2}. \tag{33}$$

例 5 证明: 如果 $(L/M)^2$ 不是有理数, 则没有两个谐波 (30) 有相同的频率. 对正方膜, 证明有无穷多对具有相同频率的谐波.

解 假设 $\nu_{n,m}=\nu_{p,q}$ 和 $(n,m)\neq(p,q)$. 则 $n\neq p$ 和 $m\neq q$(为什么?). 因此, $q^2-m^2\neq 0$, 故

$$\left(\frac{n}{L}\right)^2+\left(\frac{m}{M}\right)^2=\left(\frac{p}{L}\right)^2+\left(\frac{q}{M}\right)^2\quad\text{隐含}\quad\frac{n^2-p^2}{q^2-m^2}=\frac{L^2}{M^2}.$$

因这最后的等式的左边是有理数, 则 L^2/M^2 必是有理数, 这与假设矛盾. 对正方膜, 注意到即使 $n\neq m$, 仍有 $\nu_{m,n}=\nu_{n,m}$. 因此, 对正方膜, (m,n) 级谐波和 (n,m) 级谐波有相同的频率. □

概要 8.1

1. 二维热方程: 初边值问题

$$
\begin{aligned}
&\text{D.E.} \quad u_t = k(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \quad 0 \leqslant y \leqslant M, \quad t > 0;\\
&\text{B.C.} \quad \begin{cases} u(x,0,t) = 0, & u(x,M,t) = 0,\\ u(0,y,t) = 0, & u(L,y,t) = 0;\end{cases}\\
&\text{I.C.} \quad u(x,y,0) = f(x,y),
\end{aligned} \tag{S1}
$$

其中

$$
f(x,y) = \sum_{n,m=1}^{N} b_{n,m} \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi y}{M}, \tag{S2}
$$

有由以下给出的解

$$
u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{N} b_{n,m} e^{-\lambda_{n,m} kt} \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi y}{M},
$$

其中

$$
\lambda_{n,m} = \pi^2\big((\frac{n}{L})^2 + (\frac{m}{M})^2\big), \quad n,m = 1,2,3\cdots.
$$

2. 积分表示: 在上述问题 (S1) 中, 如果 $f(x,y)$ 在闭矩形上是连续的 (但不必是形如 (S2)), 且在每条边上为零, 则 (S1) 的唯一的连续解是

$$
u(x,y,t) = \frac{1}{4\pi kt} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2]/(4kt)} \tilde{f}_{o,o}(\bar{x},\bar{y}) d\bar{x} d\bar{y}, \ t > 0,
$$

(且 $u(x,y,0) \equiv f(x,y)$), 其中 $\tilde{f}_{o,o}(x,y)$ 是 $f(x,y)$ 唯一的延拓 (到整个平面), 关于 x 是奇的和周期的 (以 2 L 为周期) 以及关于 y 是奇的和周期的 (以 $2M$ 为周期).

3. 二重 Fourier 正弦级数: 函数 $f(x,y)$ 在矩形 $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant y \leqslant M$ 上的二重 Fourier 正弦级数是表示式

$$
\sum_{n,m=1}^{\infty} b_{n,m} \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi y}{M},
$$

其中

$$b_{n,m} = \frac{4}{LM}\int_0^M\int_0^L f(x,y)\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}dxdy, \quad n,m=1,2,3,\cdots,$$

只要这些积分存在.

4. Laplace 方程: 问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0,\quad 0<x<L,\ 0<y<M,\ 0<z<P;\\ &\text{B.C.}\quad \begin{cases} u(x,y,0)=f(x,y), \quad u(x,y,P)=g(x,y),\\ u(x,y,z)=0, \quad \text{在面}\quad x=0,\ x=L,\ y=0,\ y=M\ \text{上}, \end{cases}\end{aligned}$$

其中

$$f(x,y)=\sum_{n,m=1}^{N} a_{n,m}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}$$

和

$$g(x,y)=\sum_{n,m=1}^{N} b_{n,m}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M},$$

的解由以下给出

$$u(x,y,z)=\sum_{n,m=1}^{N} Z_{n,m}(z)\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M},$$

其中

$$Z_{n,m}(z)=\frac{1}{\sinh(P\sqrt{\lambda_{n,m}})}\left(a_{n,m}\sinh((P-z)\sqrt{\lambda_{n,m}})+b_{n,m}\sinh(z\sqrt{\lambda_{n,m}})\right),$$

以及 $\sqrt{\lambda_{n,m}}=\pi\sqrt{(\frac{n}{L})^2+(\frac{m}{M})^2}$.

5. 二维波方程: 问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\quad 0\leqslant x\leqslant L,\ 0\leqslant y\leqslant M,\ -\infty<t<\infty;\\ &\text{B.C.}\quad \begin{cases} u(x,0,t)=0, \quad u(x,M,t)=0,\\ u(0,y,t)=0, \quad u(L,y,t)=0; \end{cases}\\ &\text{I.C.}\quad u(x,y,0)=f(x,y)\quad u_t(x,y,0)=g(x,y),\end{aligned}$$

其中

$$f(x,y)=\sum_{n,m=1}^{N}A_{n,m}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}$$

和

$$g(x,y)=\sum_{n,m=1}^{N}B_{n,m}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}$$

的解是

$$u(x,y,t)=\sum_{n,m=1}^{N}u_{n,m}(x,y,t),\quad \text{且}\quad a_{n,m}=A_{n,m}\quad \text{和}\quad b_{n,m}=\frac{B_{n,m}}{a\sqrt{\lambda_{n,m}}},$$

其中 (n,m) 级谐波 $u_{n,m}(x,y,t)$ 是

$$u_{n,m}(x,y,t)=(a_{n,m}\cos(at\sqrt{\lambda_{n,m}}+b_{n,m}\sin(at\sqrt{\lambda_{n,m}}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M},$$

以及 $\sqrt{\lambda_{n,m}}=\pi\sqrt{(\frac{n}{L})^2+(\frac{m}{M})^2}$. $u_{n,m}$ 的频率为 $\frac{a}{2\pi}\sqrt{\lambda_{n,m}}$, $n,m=1,2,3,\cdots$.

练习 8.1

1. 求解问题

$$\text{D.E.}\quad u_t=6(u_{xx}+u_{yy}),\quad 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 3,\ t\geqslant 0;$$

$$\text{B.C.}\quad \begin{cases} u(x,0,t)=0, & u(x,3,t)=0,\\ u(0,y,t)=0, & u(2,y,t)=0;\end{cases}$$

$$\text{I.C.}\quad u(x,y,0)=4\sin\frac{3\pi x}{2}\sin(\pi y)-2\sin(\pi x)\sin\frac{2\pi y}{3}.$$

2. 求解问题

$$\text{D.E.}\quad u_t=u_{xx}+u_{yy},\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ t\geqslant 0;$$

$$\text{B.C.}\quad \begin{cases} u(x,0,t)=0, & u(x,1,t)=0,\\ u_x(0,y,t)=0, & u_x(1,y,t)=0;\end{cases}$$

$$\text{I.C.}\quad u(x,y,0)=2\sin^2(2\pi x)\sin(\pi y).$$

3. 求解问题

$$\text{D.E.}\quad u_t=u_{xx}+u_{yy},\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ t\geqslant 0;$$

$$\text{B.C.}\quad \begin{cases} u(x,0,t)=0, & u_y(x,1,t)=0,\\ u_x(0,y,t)=0, & u(1,y,t)=0;\end{cases}$$

$$\text{I.C.}\quad u(x,y,0)=\sin\frac{\pi(3x+y)}{2}-\sin\frac{3\pi x}{2}\cos\frac{\pi y}{2}.$$

4. 一矩形平板 $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant y \leqslant M$ 具有热传导常数 k, 在边 $y=0$ 和 $y=M$ 上绝热, 在边 $x=0$ 和 $x=L$ 上保持零温度.

(a) 对给定的连续初始温度分布 $u(x,y,0)=f(x,y)$, 写出在该板上二维热流适当的初边值问题.

(b) 利用二重 Fourier 级数, 形式求解在 (a) 部分建立的问题.

(c) 利用镜像法 (即, 通过利用初始温度到整个 xy–平面适当的延拓; 参看第 7.5 节), 获得形如 (12) 的形式解的积分表示式.

5. 设 $f(x,t)$, $g(y,t)$ 和 $h(z,t)$ 分别满足热方程 $f_t=kf_{xx}$, $g_t=kg_{yy}$ 和 $h_t=kh_{zz}$. 证明 $u(x,y,z,t)\equiv f(x,t)g(y,t)h(z,t)$ 满足 $u_t=k(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$. 在波方程情形同样的构造行得通吗? 为什么行或为什么不行?

6. (a) 利用习题 5 的技巧, 证明: 如果 $F(x)$, $G(y)$ 和 $H(z)$ 是连续和有界的, 则问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=k(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}),\quad -\infty<x,y,z<\infty,\quad t>0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,y,z,0^+)=F(x)G(y)H(z)\end{aligned}$$

的一个解是

$$u(x,y,z,t)=\\=\frac{1}{(4\pi kt)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2+(z-\bar{z})^2]/(4kt)}F(\bar{x})G(\bar{y})H(\bar{z})d\bar{x}d\bar{y}d\bar{z}.$$

(b) 如果在 (a) 中的 $F(x)G(y)H(z)$ 以这种形式函数的有限线性组合 (例如, 有限三重 Fourier 级数) 来替换, 则所给的解将仍然有效吗? 请解释.

(c) 为什么在 (a) 部分的解不是唯一的?

提示 参见第 7.4 节的例 1.

7. 考虑例 3 中的方体. (a) 如果该方体在它的一个面上绝热, 则对大的 t, 在 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 的温度是多少?

(b) 如果方体除了一个面之外都是绝热的, 则在 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 的温度是多少?

(c) 如果方体在两个面上是绝热的, 为使对大的 t 在中心的温度降得最小, 应该选两个相邻的面还是选两个相对立的面?

8. 解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0,\quad 0<x<3\pi,\ 0<y<2\pi,\ 0<z<1;\\&\text{B.C.}\quad \begin{cases}u(x,y,0)=\sin x\sin y, & u(x,y,1)=0,\\ u(x,y,z)=0, & \text{在面 } x=0,\ x=3\pi,\ y=0,\ y=2\pi \text{ 上}.\end{cases}\end{aligned}$$

9. 解

$$\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0,\quad 0<x,\ y,\ z<\pi;$$
$$\text{B.C.}\quad \begin{cases} u_x(0,y,z)=u_x(\pi,y,z)=0, & u_y(x,0,z)=u_y(x,\pi,z)=0;\\ u_z(x,y,0)=\cos x\sin^2 y, & u_z(x,y,\pi)=0.\end{cases}$$

10. (a) 考虑长方体 $0\leqslant x\leqslant L,\ 0\leqslant y\leqslant M,\ 0\leqslant z\leqslant P$. 假设在该长方体的八个顶点 (角点) 赋予实数值. 证明有唯一的具形式 $u(x,y,z)=axyz+bxy+cyz+dxz+ex+fy+gz+h$ 的调和函数在这八个顶点上等于给定的值.

提示　应用二维的结果 (参看第 6.2 节的例 1) 得到在两个面 $z=0$ 和 $z=P$ 上的调和函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$, 且在角点具有正确的值. 令 $u(x,y,z)=[(P-z)f(x,y)+zg(x,y)]/P$.

(b) 假设给定在 (a) 部分的长方体的十二条棱 (不是面) 上连续的函数, 且当三条棱相汇一角点时这些函数在该角点处相等. 证明存在定义在长方体内部的调和函数 u(即 $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$), 它可连续延拓到边界, 使得该延拓在每个面的内部是调和的, 并在每条棱上等于给定的连续函数. 可假设在每个面上的 Dirichlet 问题是可解的 (参看第 6.2 节).

提示　首先, 利用 (a) 部分把问题转化成在棱上给定的函数在八个顶点等于 0 的情形. 然后在每对相对的面上求解 Dirichlet 问题, 并像 (a) 部分那样组成一个 (凸) 线性组合. 把三对相对的面的结果相加然后除以二 (为什么?).

11. 解释为什么习题 10 的结果允许我们把长方体上的 Dirichlet 问题转化成一个相应的问题, 其中在长方体上的边界给定的函数在八个顶点上为零. 解释为什么这样的简化是必要的, 如果打算通过利用二重 Fourier 正弦级数求解面上 Dirichlet 问题的话, 如同对 (23) 所做的那样.

12. 通过假设形如 $u(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+Dx+Ey+Fz$ 是解, 来求解以下方体上的 Neumann 问题, 其中在每个面上法向导数是给定的常数:

$$\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0,\quad 0<x,\ y,\ z<1;$$
$$\text{B.C.}\quad \begin{cases} u_x(0,y,z)=a_0, & u_y(x,0,z)=b_0, & u_z(x,y,0)=c_0,\\ u_x(1,y,z)=a_1, & u_y(x,1,z)=b_1, & u_z(x,y,1)=c_1.\end{cases}$$

为什么该问题无解, 除非 $a_0+b_0+c_0=a_1+b_1+c_1$? 在解这个问题中 Fourier 级数或分离变量会有任何作用吗? 为什么有作用或为什么没有作用?

13. 求以下问题的形式解

$$\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\quad 0\leqslant x,y\leqslant 1,\ -\infty < t<\infty;$$

$$\text{B.C.}\quad \begin{cases} u(x,0,t)=0, & u(x,1,t)=0,\\ u(0,y,t)=0, & u(1,y,t)=0;\end{cases}$$

$$\text{I.C.}\quad u(x,y,0)=0,\quad u_t(x,y,0)=x(x-1)y(y-1).$$

14. 在一矩形膜中波传播的速度 a 是 600ft/s, 该膜最低的两个频率是每秒 300 周波和每秒 400 周波. 该膜的长和宽是多少?

§8.2 特征函数观点

本节引入 Laplace 算子的特征函数和特征值的概念. 这些概念提供一个统一的观点, 由这种观点能理解任意区域上任意维数的热方程和波方程的边值问题. 而且, 这些概念不依赖使用的坐标系的类型, 因此在随后的子节中当我们研究以球坐标和柱坐标表示的偏微时它们提供了一个指导性原则. 还证明了高维 Fourier 级数的一个收敛性定理, 以及讨论了高维 Fourier 变换.

△ 的特征函数和特征值

注意到虽然函数

$$f_{n,m}(x,y)=\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}$$

因它们不满足 Laplace 方程不是调和的, 但 $f_{n,m}$ 的 Laplace 是

$$\triangle f_{n,m}=(f_{n,m})_{xx}+(f_{n,m})_{yy}=-\pi^2\big((\frac{n}{L})^2+(\frac{m}{M})^2\big)f_{n,m}=-\lambda_{n,m}f_{n,m}. \tag{1}$$

因此, 当 Laplace 算子 $\triangle=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 作用在函数 $f_{n,m}$ 上时, 结果是该函数的一个常数倍, 即 $-\lambda_{n,m}f_{n,m}$.

> 一般, 对某常数 λ, 具有性质 $\triangle g+\lambda g=0$ 的函数 $g(x,y)$ 称为 △ 的**特征函数**, 只要 $g(x,y)$ 不是恒等于零. 常数 λ 称为相应于特征函数 $g(x,y)$ 的**特征值**.

注记 "特征"是由德语而来, 意为"自身", 该名称大概来自事实: 除了相差一个常数因子, △ 把这种函数变成自身. 因此, (1) 表明 $f_{n,m}(x,y)$ 是 △ 具特征

值 $\lambda_{n,m}$ 的特征函数. 对那些熟悉线性代数中的特征值概念的读者可能注意到在线性代数的意义下 ($\triangle f_{n,m} = -\lambda_{n,m} f_{n,m}$) $\triangle$ 相应于 $f_{n,m}$ 的特征值是 $-\lambda_{n,m}$. 然而, 对现在的情形上述的定义更方便, 因把非负的量 $\lambda_{n,m}$(与 $-\lambda_{n,m}$ 相对) 看作特征值更方便.

例 1 证明: 如果 $g(x,y)$ 是 $\triangle$ 具特征值 $\lambda \geqslant 0$ 的任一 C^2 特征函数, 则

(a) $v(x,y,t) = be^{-\lambda kt} g(x,y)$ 是热方程 $v_t = k\triangle v$ 的解, 和

(b) $u(x,y,t) = [b_1 \cos(a\sqrt{\lambda}t) + b_2 \sin(a\sqrt{\lambda}t)]g(x,y)$ 满足波方程 $u_{tt} = a^2 \triangle u$, 其中 b, b_1 和 b_2 是任意常数.

解 注意到 $\triangle v = \triangle(be^{-\lambda kt} g) = be^{-\lambda kt} \triangle g = -be^{-\lambda kt} \lambda g = -\lambda v$, 类似地, $\triangle u = -\lambda u$. 因此, $v_t = -\lambda bke^{-\lambda kt} g = -k\lambda v = k\triangle v$ 以及 $u_{tt} = -(a\sqrt{\lambda})^2 u = -a^2 \lambda u = a^2 \triangle u$. □

这个例子说明 $\triangle$ 的特征函数可用来构造热方程和波方程的解. 的确, 这些偏微的所有乘积解具有如同例 1 的形式. 自然, Laplace 方程 $\triangle u = 0$ 的解是具特征值 $\lambda = 0$ 的特征函数, 例 1 中构造的解则是稳态解. 在具齐次 B.C. 的问题中, 例 1 中构造的解将满足这些 B.C., 只要特征函数 $g(x,y)$ 满足这些 B.C.. 注意到所有这些评注对任意空间维数都成立. 特别对 1 维, Laplace 算子简化为 $\frac{d^2}{dx^2}$, 它的特征函数具有形式 $c_1 \sin(bx) + c_2 \cos(bx)$(具特征值 b^2) 或 $c_1 e^{bx} + c_2 e^{-bx}$(具特征值 $-b^2$). 在第三章和第五章讨论的 B.C. 提供了取决于 B.C. 的特别形式的特征函数和特征值 (例如, 当 $u(0,t) = 0$ 和 $u(L,t) = 0$ 时, $\sin \frac{n\pi x}{L}$). 对具齐次 D.E. 和 B.C. 的热问题和波问题, 以前的做法可用特征函数表述成以下步骤.

1. 利用分离变量, 求出具特征值 λ_n($n = 1,2,3,\cdots$) 的满足 B.C. 的特征函数 $g_n(x,y)$. 则如同例 1, 以时间的适当函数乘 $g(x,y)$ 得到满足 D.E. 和 B.C. 的函数 $u_n(x,y,t)$.
2. 利用叠加原理组成 D.E. 和 B.C. 更一般的解 $\sum c_n u_n(x,y,t)$.
3. 用特征函数的线性组合, 比如通过计算 Fourier 系数, 来近似 I.C. 中的每个函数 (例如, 初始温度, 或初始位置和初始速度).
4. 把乘积解的和 $\sum c_n u_n(x,y,t)$ 代入每个 I.C., 通过使与步骤 3 求得的系数相等来确定 $u_n(x,y,t)$ 的与时间有关的任意常数.

假设步骤 1 中的特征函数 $g_n(x,y)$ 已经确定, 则剩下唯一可能的困难是步骤 3. 概括说来, Fourier 级数 (单重的, 二重的或多重的) 是以满足给定的线性

齐次 B.C. 的特征函数的线性组合来恰当表示函数的学科. 的确, Fourier 级数常被称作**特征函数展开**. 虽然有一些定理证明特征函数的存在性以及适当好的函数特征函数展开的有效性, 然而这个过程一个主要障碍是当一个边值问题的区域不是一个标准形状, 比如不是长方体, 圆盘, 球, 圆柱, 等等时, 要求出特征函数是困难的. 在第 8.3–8.5 节中, 我们将确定对球和圆柱的边值问题的特征函数.

注记 Fourier 变换也可看作当需要用特征函数 $e^{i\xi x}$(具特征值 ξ^2) 的连续叠加 (即, 积分) 来表示某种定义在无穷区域上的函数时提供了特征函数展开. 例如, 如果 $f(x)$ 是速减函数, 具 Fourier 变换 $\hat{f}(\xi)$, 则反演定理 (参看第 7.3 节) 表明 $f(x)$ 由

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi \tag{2}$$

给出, 这是 $\triangle$ 的特征函数 $e^{i\xi x}$ 的连续叠加. □

对具齐次 B.C. 的热问题, 如果能得到 I.C. 中的函数的一个特征函数展开, 则该问题的解就垂手可得. 只需对每个特征函数乘上在例 1(a) 中恰当的与时间有关的因子. 例如, 如果 (2) 是初始温度 $f(x)$ 的 "特征函数展开", 则热方程 $u_t=ku_{xx}$ 相应的假定性解是 (注意到 $e^{i\xi x}$ 对应的特征值是 ξ^2)

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{-\xi^2kt}e^{i\xi x}d\xi\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(w)e^{-i\xi w}dwe^{-\xi^2kt}e^{i\xi x}d\xi\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi(w-x)}e^{-\xi^2kt}d\xi\Big)f(w)dw\\&=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(w-x)^2/(4kt)}f(w)dw,\end{aligned}$$

此为在第 7.4 节求得的解. 相同的技巧 (但用多重 Fourier 变换) 得出这种解的高维形式, 即在第 8.1 节中的 (12). 也可用这种技巧得到平面或空间上波方程的 D'Alembert 公式的高维类似公式, 但有更容易的方式 (覆盖在第 8.3 节里) 得到这些公式.

例 2 求 $\triangle$ 一个特征函数, 在一个正方形的边界上等于零, 但不是形如 $f(x)g(y)$ 的乘积.

解 注意到如果 $g_1(x,y)$ 和 $g_2(x,y)$ 是 $\triangle$ 相同的特征值 λ 的两个特征函数, 则任一线性组合 $c_1g_1+c_2g_2$ 也是特征值 λ 的特征函数. 的确, 利用 $\triangle$ 的线性性,

有 $\triangle(c_1g_1+c_2g_2)=c_1\triangle g_1+c_2\triangle g_2=-\lambda(c_1g_1+c_2g_2)$. 还注意到如果 $g_1(x,y)$ 和 $g_2(x,y)$ 在正方形的边界上为零, 则 $c_1g_1+c_2g_2$ 也满足该边界条件. 特别, 考虑正方形 $0\leqslant x,\ y\leqslant\pi$ 且对不相等的正整数 n 和 m, 令 $g_1(x,y)=\sin(nx)\sin(my)$ 以及令 $g_2(x,y)=\sin(mx)\sin(ny)$. 这些是 $\triangle$ 具公共特征值 (n^2+m^2) 的两个特征函数. 因此, 它们的任一线性组合也是具特征值 (n^2+m^2) 的特征函数. 特别令 α 是 $[0,2\pi)$ 中的任意常数, 考虑线性组合

$$g(x,y)=\cos\alpha\sin(nx)\sin(my)+\sin\alpha\sin(mx)\sin(ny). \tag{3}$$

当然, 当 $\alpha=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$ 时 $\frac{3\pi}{2}$, 该组合化成形如 $f(x)h(y)$ 的乘积. 然而, 对 α 在 $[0,2\pi)$ 中的其他值, $g(x,y)$ 不能写成这种形式 (为什么?). 为确定起见, 考虑当 $n=1,\ m=2$ 和 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ 的情形. 这时, $g(x,y)=[-\sin x\sin(2y)+\sin(2x)\sin y]/\sqrt{2}=\sqrt{2}\sin x\sin y[-\cos y+\cos x]$, 它不仅在正方形的边界上等于零, 在对角线 $y=x$ 上也等于零, 且在其他点不等于零. 形如 $f(x)h(y)$ 的函数不可能在该对角线上等于零, 除非它在正方形上恒等于零 (为什么?). □

波节曲线, 对称分类和特征空间

特征函数 $g(x,y)$ 在其上为零的曲线称为**波节曲线**. 如果 λ 是特征值 (即 $\triangle g+\lambda g=0$), 则如同例 1, 生成波方程 $u_{tt}=a^2\triangle u$ 一个相应的解, 比如 $\cos(at\sqrt{\lambda})g(x,y)$. 注意到随着膜以这种方式振动, 在波节上的点保持不动 (即

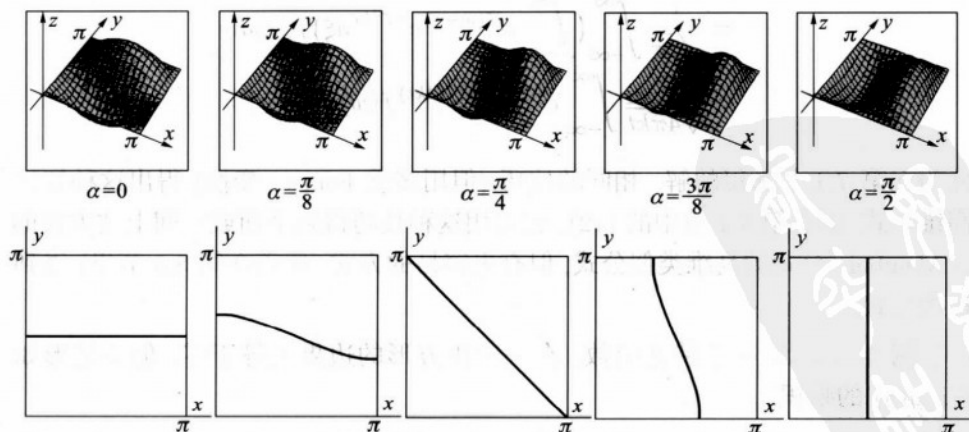


图 1

随着膜的振动, 这些点不作上下移动). 如果矩形膜的边长的平方比 L^2/M^2 是无理数, 则由 8.1 节的例 5, 不存在具有相同频率的两个谐波 (或等价地, 不存在具有相同特征值的两个独立的特征函数). 在这种情形, 任一特征函数的波节曲线由等距水平线和 (或) 垂直线段组成. 如果比 L^2/M^2 是有理数 (例如, 像正方形), 则由具相同特征值的特征函数的各种线性组合的波节曲线 (参看 (3)) 可表现为各种各样的形式. 对以式子 (3) 具 $n=1$ 和 $m=2$ 的线性组合, 对各种 α 的波节曲线在图 1 中显示. 在固定时刻 $t=\pi/(a\sqrt{5})$, $u(x,y,t)=\cos(at\sqrt{5})g(x,y)$ 相应的振动方式的图也绘出. 当 $n=1$ 和 $m=3$, 产生更复杂模式, 如在图 2 中

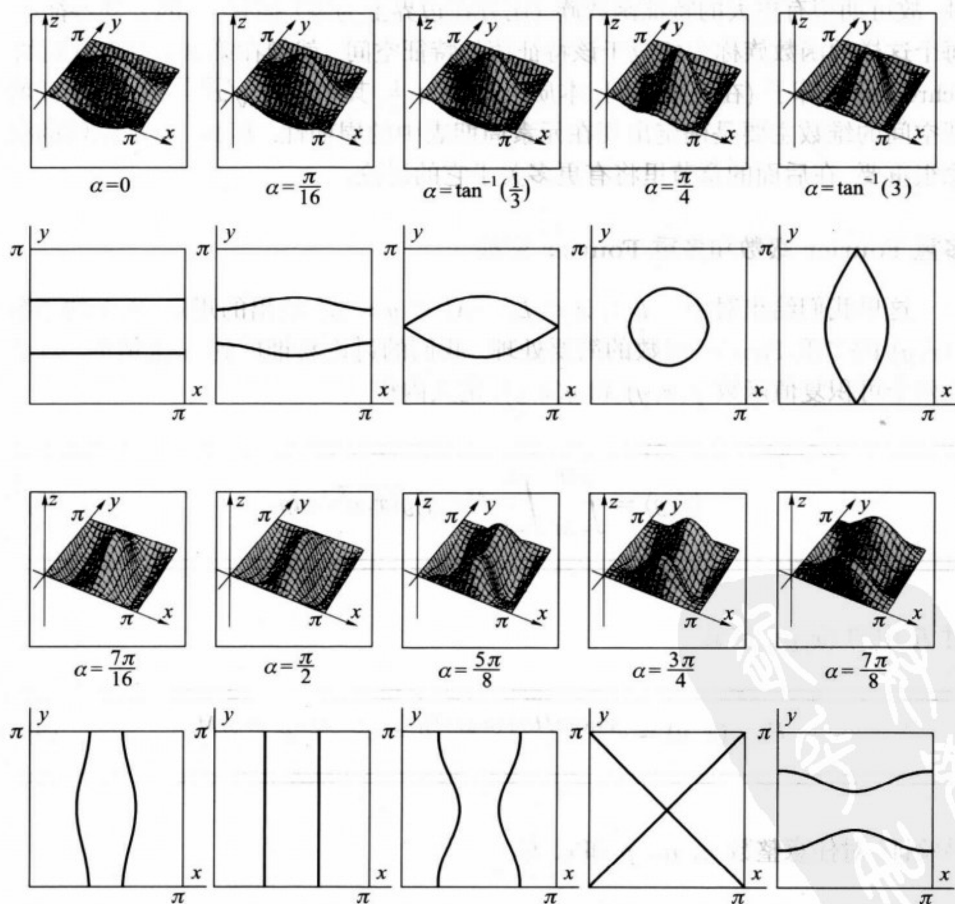


图 2

所示.

如果一真实的正方膜以伴随多种不同模式的频率振动, 则由于方形方面的微小偏差, 膜中的微小缺陷, 或一些未知的原因, 振动通常将只服从多种可能方式中的一种方式. 这是 “自发对称分类” 重要概念的一个具体例子. 虽然对称在理论上是精确的, 但在实际中几乎总是违反的. 通常, 如果一个区域具有某些对称性, 则可推出许多特征值将会有不只一个特征函数, 因为在翻动或旋转该区域的对称运算下不改变对称性, 一个特征函数可能变换成另一个具相同特征值的特征函数. 例如, 当正方形关于对角线 $y=x$ 翻转, 特征函数 $\sin(nx)\sin(my)$ 转换成 $\sin(ny)\sin(mx)$, 因对翻交换 x 和 y. 由于圆盘和球具有更高程度的对称性, 故可期望有更大的特征函数族 (比方在边界上为零) 拥有 $\triangle$ 的公共特征值. 每个这样的函数族称为相应于该特征值的特征空间. 就像在第 8.5 节将看到的, Schrödinger 算子 (在三维空间, 本质上是 $\triangle+\frac{1}{\rho}$, 其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$) 的特征空间的维数主要是确定出现在元素周期表中的周期性. 因此, 特征空间的概念很重要, 在后面的章节里将有更多关于它的讨论.

多重 Fourier 级数和多重 Fourier 变换

这里我们给出对由 $-L\leqslant x\leqslant L,\ -M\leqslant y\leqslant M$ 给出的矩形 R 上的函数 $f(x,y)$ 的二重 Fourier 级数的简要处理. 我们的讨论易推广到 n 维情形. 对 R 上两个可积复值函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$, 定义内积

$$\langle f,g\rangle=\int_{-M}^{M}\int_{-L}^{L}f(x,y)\overline{g(x,y)}dxdy. \tag{4}$$

对 R 中的 (x,y), 定义

$$E_{n,m}(x,y)=e^{i\pi[(nx/L)+(my/M)]}=e^{in\pi x/L}e^{im\pi y/M}. \tag{5}$$

易验证, 对任意整数 $n,\ m,\ p$ 和 q, 有

$$\langle E_{n,m},E_{p,q}\rangle=\begin{cases}0, & \text{如果 } n\neq p \quad \text{或} \quad m\neq q,\\ 4LM, & \text{如果 } n=p \quad \text{和} \quad m=q,\end{cases} \tag{6}$$

即, 函数 $E_{n,m}$ 组成范数为 $4LM$ 的正交函数族.

定义 定义在矩形 $R(0 \leqslant x \leqslant L,\ 0 \leqslant y \leqslant M)$ 上的函数 $f(x,y)$ 的 (复)**二重 Fourier 级数**是表示式

$$\begin{aligned} \mathrm{FS}\ f(x,y) &= \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} c_{n,m} E_{n,m}(x,y) \\ &= \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} c_{n,m} e^{i\pi[(nx/L)+(my/M)]}, \end{aligned} \tag{7}$$

其中

$$c_{n,m} = \frac{1}{4LM}\langle f, E_{n,m}\rangle = \frac{1}{4LM}\int_{-M}^{M}\int_{-L}^{L} f(x,y)e^{-i\pi[(nx/L)+(my/M)]}dxdy, \tag{8}$$

$E_{n,m}$ 由 (5) 定义, 只要所有这些积分存在.

注意到关于 $c_{n,m}$ 的公式 (8) 可由 (7) 的两边与 $E_{n,m}$ 取形式内积然后利用正交性结果 (6) 得到. 在和式 (7) 中, 整数 n 和 m 独立地取遍所有整数. 敏捷的读者会想知道级数 (7) 是否收敛以及不管项的求和次序如何是否得到同样的结果. 虽然在有限项的和中, 求和的次序没关系, 但在无穷项和式中求和的次序会有很大的不同. 例如, $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\cdots$, 但把这个和重新写成 $(1 + \frac{1}{5}) - \frac{1}{3} + (\frac{1}{9} + \frac{1}{13}) - \frac{1}{7} + (\frac{1}{17} + \frac{1}{21}) - \frac{1}{11} + \cdots$, 得到大于 $\frac{13}{15}$ 的值, 此值大于 $\frac{\pi}{4}$. 然而, 如果一个无穷级数的项的绝对值 (或模, 如果项是复数) 的和式是有限的 (即, 该级数是绝对收敛的), 则求和的次序将没关系. 级数 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$ 的问题是它不是绝对收敛的 (即, $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty$). Fourier 级数 (7) 是**绝对收敛的**, 如果所有系数模的和 $\sum |c_{n,m}|$ 是有限的. 该 Fourier 级数求和的次序将是无关紧要的. 于是, 在下面的定理中我们先给出关于函数 $f(x,y)$ 的保证 $\sum |c_{n,m}| < \infty$ 的判别准则.

定理 1 (二重 Fourier 级数收敛定理) 设 $f(x,y)$ 是矩形 $-L \leqslant x \leqslant L$, $-M \leqslant y \leqslant M$ 上 C^k 函数 $(k \geqslant 3)$. 令 K 是 $|\partial^k f/\partial x^k|$ 和 $|\partial^k f/\partial y^k|$ 在该矩形上的最大值的最大者. 假设对每个 $j = 0, 1, \cdots, k-1$, 有

$$\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(-L,y) = \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(L,y) \quad 和 \quad \frac{\partial^j f}{\partial y^j}(x,-M) = \frac{\partial^j f}{\partial y^j}(x,M). \tag{9}$$

则对任一正整数 N, 有

$$\sum_{\substack{|n|>N \\ \text{或 } |m|>N}} |c_{n,m}| \leqslant \frac{2\pi K(\sqrt{2}/\pi)^k \max(L^k, M^k)}{(k-2)N^{k-2}}, \tag{10}$$

其中 $c_{n,m}$ 是 **Fourier** 系数 $\frac{1}{4LM}\langle f, E_{n,m}\rangle$. 特别, $\sum |c_{n,m}| < \infty$. 另外, 对 f 的二重 **Fourier** 级数中由 m 和 n 从 $-N$ 到 N 求和得到的部分和, 有

$$\left|f(x,y) - \sum_{n,m=-N}^{N} c_{n,m} e^{i\pi[(nx/L)+(my/M)]}\right| \leqslant \frac{2\pi K(\sqrt{2}/\pi)^k \max(L^k, M^k)}{(k-2)N^{k-2}}, \tag{11}$$

即, 这些部分和在矩形上一致收敛到函数 $f(x,y)$.

证明 反复关于 x 分部积分并利用关系式 (9) 来消去端点值, 得

$$c_{n,m} = \frac{1}{4LM}\int_{-M}^{M}\int_{-L}^{L} f(x,y)\overline{E_{n,m}(x,y)}dxdy = \cdots$$

$$= \frac{1}{4LM}\left(\frac{L}{n\pi i}\right)^k \int_{-M}^{M}\int_{-L}^{L}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\right)\overline{E_{n,m}(x,y)}dxdy, \quad n \neq 0. \tag{12}$$

如果对 y 分部积分, 类似的结果成立. 于是, 由 K 的定义,

$$|c_{n,m}| \leqslant K\left(\frac{L}{|n|\pi}\right)^k \quad \text{和} \quad |c_{n,m}| \leqslant K\left(\frac{L}{|m|\pi}\right)^k, \quad n,\ m \neq 0. \tag{13}$$

(13) 中分子 L 和 M 可用大者替换 (即, 用 $\max(L,M)$ 替换), 然后选取两个由此产生的不等式中的结果更强的一个 (即, 分母更大者), 对 $n,\ m \neq 0$, 得

$$|c_{n,m}| \leqslant K\left(\frac{\max(L,M)}{\pi\max(|m|,|n|)}\right)^k \leqslant K\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^k \frac{\max(L^k, M^k)}{(n^2+m^2)^{k/2}}, \tag{14}$$

因 $\sqrt{\frac{1}{2}(n^2+m^2)} \leqslant \max(|m|,|n|)$. 利用二重积分比较, 得

$$\sum_{\substack{|n|>N \\ \text{或 } |m|>N}} \frac{1}{(n^2+m^2)^{k/2}} \leqslant \int_{u^2+v^2>N^2} (u^2+v^2)^{-k/2} dudv$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_N^{\infty} r^{-k} r dr d\theta = \frac{2\pi N^{2-k}}{(k-2)}. \tag{15}$$

结合 (14) 和 (15), 得到结果 (10). 一旦证明 FS $f(x,y) = f(x,y)$, 则 (11) 的左边变成

$$\left|\sum_{\substack{|n|>N \\ \text{或 } |m|>N}} c_{n,m} e^{i\pi[(nx/L)+(my/M)]}\right| \leqslant \sum_{\substack{|n|>N \\ \text{或 } |m|>N}} |c_{n,m}|,$$

则 (11) 由 (10) 得到. 因此, 尚需证明 FS $f(x,y) = f(x,y)$. 注意到因已假设 $f(x,y)$ 是 $C^k(k \geqslant 3)$ 的, 且有端点条件 (9) 成立, 我们无疑知道对 $[-M,M]$ 中每个固定的 y, $f(x,y)$(作为 x 的函数) 完全满足第 4.2 节任一收敛定理的条件. 因此, 有

$$f(x,y) = \sum_{|n|=0}^{\infty} g_n(y) e^{in\pi x/L}, \quad \text{其中} \quad g_n(y) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x,y) e^{-in\pi x/L} dx. \tag{16}$$

由 Leibniz 法则, $g_n(y)$ 无疑是 C^2 的, 且利用 (9), 有 $g_n(-M) = g_n(M)$ 和 $g_n'(-M) = g_n'(M)$. 因此, $g_n(y)$ 作为 y 的函数也等于它的 Fourier 级数, 即

$$g_n(y) = \sum_{|m|=0}^{\infty} C_{n,m} e^{im\pi y/M}, \quad \text{其中} \quad C_{n,m} = \frac{1}{2M}\int_{-M}^{M} g_n(y) e^{-im\pi y/M} dy = c_{n,m}.$$

因此, 把 $g_n(y)$ 的这个表示式代入 (16), 得

$$f(x,y) = \sum_{|n|=0}^{\infty}\Big(\sum_{|m|=0}^{\infty} c_{n,m} e^{im\pi y/M}\Big) e^{in\pi x/L} = \text{FS } f(x,y),$$

其中已默许利用事实 $\sum |c_{n,m}| < \infty$ (即在最后的等式中, 我们需要知道 FS $f(x,y)$ 与项的排序无关). □

注记 利用 Euler 公式,

$$e^{i\pi(\frac{nx}{L}+\frac{my}{M})} = e^{i\frac{n\pi x}{L}} e^{i\frac{m\pi y}{M}} = \left(\cos\frac{n\pi x}{L} + i\sin\frac{n\pi x}{L}\right)\left(\cos\frac{m\pi y}{M} + i\sin\frac{m\pi y}{M}\right),$$

复 Fourier 级数可写成四种可能乘积

$$\begin{array}{ll} \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}, & \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi y}{M} \\ \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi y}{M}, & \cos\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}. \end{array} \tag{17}$$

而且, 如果函数 $f(x,y)$(定义在矩形 $-L \leqslant x \leqslant L$, $-M \leqslant y \leqslant M$ 上) 是实值的, 则复 Fourier 级数中所有虚数项消除, 只留下具实系数涉及 (17) 诸项的级数. 如

果函数 $f(x,y)$ 关于 x 是奇的, 关于 y 是奇的, 则只包含项 $\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}$. 因此, 如果想用二重正弦级数表示定义在矩形 $0\leqslant x\leqslant L$, $0\leqslant y\leqslant M$ 上的函数, 可对该函数关于 x 和关于 y 奇延拓到更大的矩形 $-L\leqslant x\leqslant L$, $-M\leqslant y\leqslant M$ 上, 然后计算该延拓函数的复 Fourier 级数. 这完全等价于利用第 8.1 节的公式 (10) 来计算未经延拓的函数的二重 Fourier 正弦级数. 一般而言, 经不同类型的延拓, 所有各种二重 Fourier 级数看起来是经适当延拓的函数的复 Fourier 级数的特殊情形. 所有上述对二重 Fourier 级数的处理都易变更用来处理三重 Fourier 级数或任意维数的多重 Fourier 级数的情形 (例如, 见习题 6). □

二重 Fourier 变换

假设 $f(x,y)$ 是对所有 (x,y) 有定义的函数, 设 $f(x,y)$ 是绝对可积的(即, $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|dxdy<\infty$). 则 $f(x,y)$ 的**二重 Fourier 变换**是函数

$$\hat{f}(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{-i(\xi x+\eta y)}dxdy. \tag{18}$$

形式上, $\hat{f}(\xi,\eta)$ 也可通过先对变量 x 取 Fourier 变换, 然后对结果关于 y 取 Fourier 变换得到, 即

$$\hat{f}(\xi,\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi,y)e^{-i\eta y}dy,\quad \text{其中}\quad \hat{f}(\xi,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{-i\xi x}dx.$$

换言之,

$$\hat{f}(\xi,\eta)=[\hat{f}(\xi,y)]^{\wedge}(\eta). \tag{19}$$

绝对可积函数 $g(\xi,\eta)$ 的**二重 Fourier** 变换的反演是函数

$$\check{g}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta. \tag{20}$$

显然,$\check{g}(x,y)=[\check{g}(x,\eta)]^{\vee}(y)$. 通过两次形式应用一维 Fourier 变换反演定理 (参看第 7.3 节), 可得形式二重 Fourier 变换的反演定理, 即

$$f(x,y)=[\hat{f}(\xi,\eta)]^{\vee}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta. \tag{21}$$

由交叠应用单个变量的卷积定理 ($[k*g]^\wedge(\xi)=\sqrt{2\pi}\hat{k}(\xi)\hat{g}(\xi)$) 也可得到形式 (二重) 卷积定理如下. 对 "好的", 适当的衰减函数 $f(x,y)$ 和 $h(x,y)$, 有

$$[f*h](x,y)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-w,y-z)h(w,z)dwdz. \tag{22}$$

则

$$\begin{aligned}[f*h]^\wedge(\xi,\eta)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-w,y-z)h(w,z)\\&\quad e^{-i(\xi x+\eta y)}dwdzdxdy\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty}f(x-w,y-z)h(w,z)dw)\\&\quad e^{-i\xi x}dx)dz)e^{-i\eta y}dy\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi,y-z)\hat{h}(\xi,z)dz)e^{-i\eta y}dy\\&=2\pi\hat{f}(\xi,\eta)\hat{h}(\xi,\eta),\end{aligned}$$

其中形式利用了 Fubini 定理 (参看附录 3), 单变量卷积定理和 (19).

注意到所有这些形式处理在所有出现的函数是速减的情形下肯定成立. 在利用 Fourier 变换方法求偏微假定性解中, 对建立使得反演定理和卷积定理成立的非常一般的条件没什么优越, 因这样的解必须独立地验证. 此外, 上述的定义和结果毫无困难地推广到任意有限维数 n 的 Fourier 变换情形.

概要 8.2

1. 特征函数和特征值: 对某个常数 λ, 满足 $\triangle g+\lambda g=0$ 的函数 g 称为是 $\triangle$ 的特征函数, 只要 $g(x,y)$ 不恒等于零. 常数 λ 称为相应于特征函数 g 的特征值.

2. 二重 Fourier 级数: 定义在矩形 $R(-L\leqslant x\leqslant L,\ -M\leqslant y\leqslant M)$ 上函数 $f(x,y)$ 的 (复) 二重 Fourier 级数是表示式

$$\text{FS}\ f(x,y)=\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}c_{n,m}E_{n,m}(x,y)=\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}c_{n,m}e^{i\pi[(nx/L)+(my/M)]},$$

其中[①]

$$c_{n,m}=\frac{1}{4LM}\langle f,E_{n,m}\rangle=\frac{1}{4LM}\int_{-M}^{M}\int_{-L}^{L}f(x,y)e^{-i\pi[(nx/L)+(my/M)]}dxdy,$$

① 原书下式中的被积函数误为 $f(x,y)e^{-i\pi(mx/L+ny/M)}$.——译者

和 $E_{n,m}(x,y) = e^{i\pi(nx/L+my/M)}$, 只要所有这些积分存在. 定理 1 给出级数 $FS\ f(x,y)$ 在 R 上一致收敛到 $f(x,y)$ 的准则.

3. 二重 Fourier 变换: 假设 $f(x,y)$ 是对所有的 (x,y) 有定义的函数, 并设 $f(x,y)$ 是绝对可积的 (即 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|dxdy < \infty$). 则 $f(x,y)$ 的二重 Fourier 变换是函数:

$$\hat{f}(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-i(\xi x+\eta y)}dxdy.$$

绝对可积函数 $g(\xi,\eta)$ 的二重 Fourier 变换的反演是函数:

$$\check{g}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta.$$

通过两次形式应用一维 Fourier 变换反演定理, 可得到形式二重 Fourier 变换反演定理, 即

$$f(x,y) = [\hat{f}(\xi,\eta)]^{\vee}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta.$$

由交叠应用单变量卷积定理也能得到以下形式 (二重) 卷积定理. 若

$$[f*g](x,y) \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-w,y-z)h(w,z)dwdz,$$

则

$$[f*g]^{\wedge}(\xi,\eta) = 2\pi\hat{f}(\xi,\eta)\hat{h}(\xi,\eta).$$

练习 8.2

1. (a) 求 $\triangle = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 在矩形 R $(0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 2)$ 上满足 B.C. $f_x(0,y) = f_x(3,y) = 0$ $(0 \leqslant y \leqslant 2)$ 和 $f_y(x,0) = f_y(x,2) = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 3)$ 的所有特征函数 $f(x,y)$.

(b) 对 (a) 部分中求得的每个特征函数, 构造在 R 上热方程 $u_t = k\triangle u$ 的相应解. 叙述解是这些构造解的线性组合的一个初边值问题.

(c) 再做 (b) 部分, 但现在是有关 R 上的波方程 $u_{tt} = a^2\triangle u$.

2. (a) 矩形膜谐波的频率与在矩形的边界上为零的 Laplace 算子特征函数的特征值之间有什么关系?

(b) 令 λ_1 和 λ_2 是 (a) 部分特征函数的最小特征值 (其中 $\lambda_1 < \lambda_2$). 证明膜的长和宽由 λ_1 和 λ_2 确定. 证明 $\frac{2}{5} \leqslant \lambda_1/\lambda_2 < 1$, 只对正方膜有 $\frac{2}{5} = \lambda_1/\lambda_2$.

注记 最近发现 [见 C.Gordon, D.L.Web, 和 S.Wolpert, *One cannot hear the shape of a drum*, Bull. Amer. Math. Soc. **27**(1992), 134-138] 膜的精确形状 (不必是矩形的) 是无法确定的, 即使知道了所有特征值 (或所有频率). 作为对这方面的进一步阅读, 我们推荐文章:Marc Kac, *Can one hear the shape of a drum?* Amer. Math. Monthly **73S**(1966), 1~23.

3. 给出一个矩形膜例子, 它不是正方膜, 但有两个线性无关 (即一个不是另一个的常数倍) 的特征函数具相同的特征值.

提示 参看第 8.1 节的例 5. 有无穷多种可能的例子.

4. 在单位正方形 $0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$ 考虑二维热流, 具绝热边界. 解释为什么具 $u(x,y,0) = \cos(3\pi x)\cos(\pi y)$ 的温度 $u(x,y,t)$ 的最大值趋于零 (当 $t \to \infty$) 比具 $v(x,y,0) = \cos(2\pi x)\cos(2\pi y)$ 的温度 $v(x,y,t)$ 的最大值趋于零快. 一般而言, 初始特征函数温度分布的特征值的大小如何影响最大温度的相对衰减率?

5. 利用定理 1 叙述和证明定义在矩形 $0 \leqslant x \leqslant L,\ 0 \leqslant y \leqslant M$ 上适当函数 $g(x,y)$ 的二重 Fourier 级数的一个一致收敛定理. 特别, 解释为什么为了利用定理 1 必须假设 $g_{xx}(0^+,y) = 0\ (0 \leqslant y \leqslant M)$.

6. 叙述和证明本节的收敛定理 (定理 1) 在三重复 Fourier 级数中的类似定理.

7. 由形式应用二重 Fourier 变换的性质, 导出以下热问题的第 8.1 节的假定性解 (12):

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = k(u_{xx}+u_{yy}),\quad -\infty < x,y < \infty,\ t>0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,y,0) = F(x,y),\end{aligned}$$

其中 $F(x,y)$ 是给定的绝对可积和连续的函数.

8. (a) 叙述和证明长方体上热方程的最大值原理.

(b) 如果初始温度和边界温度只近似地知道, 为什么有这样的结果很重要?

(c) 为建立在 (a) 部分叙述的最大值原理, 模仿第 3.2 节一维热方程最大值原理的证明. 对长方体中的热流, 这本质上相同的证明行得通吗?

9. 利用形式计算, 对二重 Fourier 变换验证 Parseval 等式:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\overline{g(x,y)}dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi,\eta)\overline{\hat{g}(\xi,\eta)}d\xi d\eta.$$

提示 可对每个变量分别应用 Parseval 等式. 或利用反演定理用 $\hat{f}(\xi,\eta)$ 表示 $f(x,y)$, 然后交换积分次序.

10. (a) 对在矩形上的二重 Fourier 级数叙述和证明 Bessel 不等式.

(b) 对如定理 1 的函数 $f(x,y)$ 叙述和证明 Parseval 等式.

提示　对 (a) 部分, 模仿单个变量情形的 Bessel 不等式的证明 (参看第 4.2 节), 对 (b) 部分, 利用练习 4.2 的习题 5 和习题 7 的想法.

§8.3 球坐标的偏微

在第 6.1 节, 我们已经看到二维 Laplace 方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 在坐标旋转变换下保持它的形式不变. 对空间的 Laplace 方程结果也是对的, 因任一空间的旋转是关于 x, y 和 z 轴的旋转的复合, 由二维的结果, 每个这种旋转保持二维结果的形式. 因此, 我们期望用球坐标来看 Laplace 方程 $\triangle u \equiv u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$ (或三维热方程 $u_t=k\triangle u$ 或三维波方程 $u_{tt}=a^2\triangle u$), 可利用这种旋转对称性. 而且许多自然的或人造的物体 (例如, 地球, 太阳, 泡泡, 眼球, 肿瘤, 网球, 气球, 水滴, 橘子, 某种细胞和病毒, 原子, 等等) 近似球的形状, 对这些物体的边值问题利用球坐标是绝对必要的.

球坐标的 Laplace 算子 —— 几何构造

在下面的图 1 中, P 是某个任意点 (不同于原点 O), ρ 是 P 到原点的距离, φ 是正 z–轴到线段 OP 的角度 $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$, θ 是正 x–轴到 OP 在 xy–平面的射影 OP' 的角度 $(0\leqslant\theta<2\pi)$.

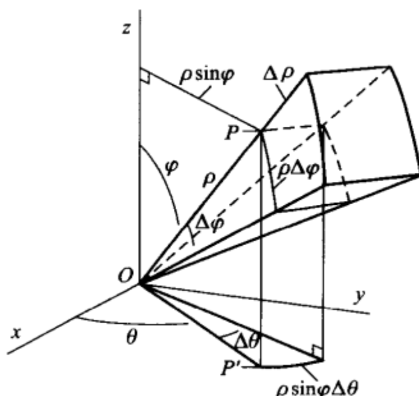


图 1

P 的**球坐标**是 (ρ,φ,θ). 注意到当 P 在 xy–平面时, P 的球坐标是 $(r,\frac{\pi}{2},\theta)$. 因此, 球坐标是极坐标的自然推广. 在应用领域的许多书籍中, θ 取作从 z–轴的角

度 (即, 在图 1 中 φ 和 θ 对换). 知道混乱的来源是有益的. 的确, 许多书用 (r,θ) 表示极坐标, 然后当引入球坐标时, 定义 θ 是从 z–轴的角度! 联系球坐标与笛卡儿坐标的转换式是

$$
\begin{aligned}
x &= \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\\
y &= \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad \varphi = \arccos\left(\tfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \quad (x^2+y^2+z^2\neq 0),\\
z &= \rho\cos\varphi, \quad \theta = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y\geqslant 0, \quad (x^2+y^2\neq 0),\\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+\pi, & y<0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{1}
$$

考虑形如 $\rho_1\leqslant\rho\leqslant\rho_2$, $\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2$, $\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2$ 的立体区域. 称它为**球形体**. 该体的体积由下式给出

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\rho_1}^{\rho_2}\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta = \frac{1}{3}(\rho_2^3-\rho_1^3)(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)(\theta_2-\theta_1).$$

特别, 对球 $0\leqslant\rho\leqslant\rho_2$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 我们得 $\frac{4}{3}\pi\rho_2^3$. 这个积分是总和了所有无穷小的, 在图 1 中所示的接近长方体的球形体的体积 $dV = (d\rho)(\rho\sin\varphi d\theta)(\rho d\varphi) = \rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$ 的结果. 量 $\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$ 称为**球体积元素**, 且在用球坐标计算函数的三重积分时必含在其中的 (就像用极坐标计算二重积分时 $rdrd\theta$ 必含在其中一样). 现来证明允许用球坐标来计算一个函数的 Laplace 算式的公式. 虽然可用链法则来证明下面的结果, 然而我们的证明提供了在以后的章节中将需要的某种几何思想.

命题 1 (球坐标的 Laplace 算式) 设 $u(x,y,z)$ 是定义在 xyz–空间的一个区域上的 C^2 函数. 如果 u 用球坐标表示, 记作 $u(x,y,z)=U(\rho,\varphi,\theta)$, 则对 $\rho\sin\varphi\neq 0$,

$$
\begin{aligned}
u_{xx}+u_{yy}+u_{zz} &= \frac{1}{\rho^2}\left((\rho^2U_\rho)_\rho + \frac{1}{\sin\varphi}(\sin\varphi U_\varphi)_\varphi + \frac{1}{\sin^2\varphi}U_{\theta\theta}\right)\\
&= U_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho}U_\rho + \frac{1}{\rho^2}\left(U_{\varphi\varphi} + \cot\varphi U_\varphi + \frac{1}{\sin^2\varphi}U_{\theta\theta}\right).
\end{aligned} \tag{2}
$$

证明 函数 f 在任一点 P 的 Laplace 算式可通过组成函数在 P 点沿三条直线的二阶导数的和来计算, 这三条直线是以弧长为参数且在 P 点垂直相交. 变量 ρ 确定过 P 点的径向线关于弧长的参数, 的确, (2) 中的第一项是 U 沿着该直线的二阶导数. 对另外两条直线, 取常数纬度曲线的切线和常数经度曲线的切线 (分别以 θ 和 φ 为参数). 令 $(\rho(t),\theta(t),\varphi(t))$ 是沿与过点 $(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)$, $\varphi_0\neq 0$ 或 π 的经线相切的直线在距离 t 处 (比如, 向下方向) 点的球坐标. 有 $\rho^2(t)=t^2+\rho_0^2$, $\theta(t)\equiv\theta_0$ 和 $\sin(\varphi(t)-\varphi_0)=\frac{t}{\rho(t)}$. 则 U 沿该直线的二阶导数是

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}U(\rho(t),\varphi(t),\theta(t))\right)&=\frac{d}{dt}\left(U_\rho\frac{d\rho}{dt}+U_\varphi\frac{d\varphi}{dt}+U_\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\\&=U_{\rho\rho}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+U_\rho\rho''(t)+U_{\varphi\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\\&\quad+U_\varphi\varphi''(t)+U_{\theta\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+U_\theta\theta''(t).\end{aligned}\tag{3}$$

现 $2\rho\rho'=2t$ 和 $2\rho'^2+2\rho\rho''=2$. 因此, 在 $t=0$, 有 $\rho'=0$ 和 $\rho''=\frac{1}{\rho_0}$. 而且, $\cos(\varphi-\varphi_0)\varphi'=\rho^{-1}-t\rho^{-2}\rho'$ 以及 $-\sin(\varphi-\varphi_0)\varphi'^2+\cos(\varphi-\varphi_0)\varphi''=-2\rho^{-2}\rho'+2\rho^{-3}\rho'^2-t\rho^{-2}\rho''$. 因此, 在 $t=0$ 处, 得 $\varphi'=\rho_0^{-1}$ 和 $\varphi''=0$. 于是, (3) 成为

$$\frac{1}{\rho_0}U_\rho+\frac{1}{\rho_0^2}U_{\varphi\varphi}.\tag{4}$$

剩下来证明 U 沿着与过点 $(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)$ 的常数纬线相切的直线的二阶导数是

$$\frac{1}{\rho_0}U_\rho+\frac{1}{\rho_0^2}\cot(\varphi_0)U_\varphi+\frac{1}{\rho_0^2\sin^2\varphi_0}U_{\theta\theta}.\tag{5}$$

对该直线, 仍然有 $\rho(t)^2=\rho_0^2+t^2$, $\sin(\theta(t)-\theta_0)=t/[\rho(t)\sin\varphi_0]$ 和 (利用 (1)) $\cos\varphi(t)=\rho_0\cos\varphi_0/\rho(t)$. 因此, 在 $t=0$, 如同前, 又有 $\rho'=0$, $\rho''=\rho_0^{-1}$, $\theta'=[\rho_0\sin\theta_0]^{-1}$ 和 $\theta''=0$. 为计算 $\varphi'(0)$ 和 $\varphi''(0)$, 先注意到 $-\sin(\varphi)\varphi'=\rho_0\cos\varphi_0[-\rho^{-2}\rho']$ 和 $-\cos(\varphi)\varphi'^2+\sin(\varphi)\varphi''=\rho_0\cos\varphi_0[2\rho^{-3}\rho'^2-\rho^{-2}\rho'']$. 因此, 在 $t=0$, 有 $\varphi'=0$ 和 $\varphi''=\rho_0^{-2}\cot\varphi_0$. 把这些值代入 (3), 得 (5), 把 (4) 和 (5) 加到 $U_{\rho\rho}$, 得式子 (2). □

例 1 函数 $u(x,y,z)=xyz$ 显然是调和的 (即, $\triangle u=0$), 用球坐标把 $u(x,y,z)$ 重写成 $U(\rho,\varphi,\theta)$ 然后验证 (2) 的右边为 0.

解 利用 (1), 得

$$u(x,y,z)=U(\rho,\varphi,\theta)=\rho^3\sin^2\varphi\cos\varphi\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\rho^3\sin^2\varphi\cos\varphi\sin 2\theta.$$

因此,

$$
\begin{aligned}
&U\rho\rho+\frac{2}{\rho_0}U_\rho+\frac{1}{\rho_0^2}\big(U_{\varphi\varphi}+\cot\varphi U_\varphi+\frac{1}{\sin^2\varphi}U_{\theta\theta}\big)\\
=&6\rho\sin^2\varphi\cos\varphi\sin 2\theta+\rho\big((2\sin\varphi\cos^2\varphi-\sin^3\varphi)_\varphi\\
&+\cot\varphi(2\sin\varphi\cos^2\varphi-\sin^3\varphi)\big)\frac{1}{2}\sin(2\theta)-2\rho\cos\varphi\sin(2\theta)\\
=&6\rho\sin^2\varphi\cos\varphi\sin(2\theta)+\rho\big((2\sin\varphi-3\sin^3\varphi)_\varphi\\
&+\cot\varphi(2\sin\varphi\cos^2\varphi-\sin^3\varphi)\big)\frac{1}{2}\sin(2\theta)-2\rho\cos\varphi\sin(2\theta)\\
=&6\rho\sin^2\varphi\cos\varphi\sin(2\theta)+\rho\big(2\cos\varphi-9\sin^2\varphi\cos\varphi\\
&+(2\cos^3\varphi-\cos\varphi\sin^2\varphi)\big)\frac{1}{2}\sin(2\theta)-2\rho\cos\varphi\sin(2\theta)\\
=&6\rho\sin^2\varphi\cos\varphi\sin 2\theta+\rho\big(-2\cos\varphi-9\sin^2\varphi\cos\varphi\\
&+(2-3\sin^2\varphi)\cos\varphi\big)\frac{1}{2}\sin(2\theta)\\
=&6\rho\sin^2\varphi\cos\varphi\sin(2\theta)-6\rho\sin^2\varphi\cos\varphi\sin(2\theta)=0.
\end{aligned}
$$
□

单位球面上的 Laplace 算子 $\triangle_s$

在命题 1 的证明中我们看到在球坐标下 Laplace 算式分解成三部分, 它们对应于 U 沿着与以 ρ, φ 和 θ 为参数的坐标曲线相切的直线的二阶导数:

$$U_{\rho\rho}+\left(\frac{1}{\rho_0^2}U_{\varphi\varphi}+\frac{1}{\rho_0}U_\rho\right)+\left(\frac{1}{\rho_0^2}\left(\frac{1}{\sin^2\varphi}U_{\theta\theta}+\cot\varphi U_\varphi\right)+\frac{1}{\rho_0}U_\rho\right).\tag{6}$$

这给出了 (2) 中各项的几何解释; 用别的方法, 难以从几何上说清楚. 如果有个最初仅定义在以 φ 和 θ 为参数的单位球上的函数 $f(\varphi,\theta)$, 则由定义 $\tilde{f}(\rho,\varphi,\theta)\equiv f(\varphi,\theta)$(即, 沿着球的法线以常值延拓) 可把该函数延拓到原点之外的所有空间. 对在球面 $\rho=1$ 上的 C^2 函数 $f(\varphi,\theta)$, Laplace 算子 $\triangle_s$ 是

$$\triangle_s f(\varphi,\theta)=\triangle\tilde{f}(\rho,\varphi,\theta)|_{\rho=1}=\frac{1}{\sin\varphi}[\sin\varphi f_\varphi]_\varphi+\frac{1}{\sin^2\varphi}f_{\theta\theta}.\tag{7}$$

根据 $U=\tilde{f}$ 的 (6), 在球面上点 P 处, Laplace 算式 $\triangle_s f$ 是 $\tilde{f}$ 沿着一对在 P 垂直相交的切线的二阶导数的和. 如果这些直线旋转, 二阶导数的和保持不变. 因此, 无论什么情况, 表示式 (7) 将有确切的极限, 即使当 φ 趋于 0 或 π(即, 球面上 C^2 函数的 Laplace 算式是连续的, 因为在每点, Laplace 算式几何上可用相

同的方式计算). 换言之, 如果 f 是球面上的 C^2 函数, (7) 中 $\triangle_s f$ 在 $\varphi=0$ 和 $\varphi=\pi$ 上明显的奇性总是可除的 (参看下面的例 2). Laplace 算式的有点复杂的形式 (7) 是由于纬线圆的周长是 $2\pi\sin\varphi$ 的事实, 它与 φ 有关. 换句话说, 公式 (7) 中关于 $\triangle_s$ 的不对称来抵消取决于北极和南极的选择的坐标 (φ,θ) 方面的不对称是必要的. □

例 2 对单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$(或 $\rho=1$) 上点 (x,y,z), 令 $u(x,y,z)=xyz$. 用该球面上的坐标 (φ,θ) 写出该函数, 记作 $u(x,y,z)=f(\varphi,\theta)$. 计算 $\triangle_s f$ 并证明 $\triangle_s f+12f=0$.

解 由例 1 得知, 对任意的 (x,y,z), $u(x,y,z)=U(\rho,\varphi,\theta)=\frac{1}{2}\rho^3\sin^2\varphi\cos\varphi\sin 2\theta$. 因在单位球面上 $\rho=1$, 故 $f(\varphi,\theta)=\frac{1}{2}\sin^2\varphi\cos\varphi\sin(2\theta)$. 为计算 $\triangle_s f$, 注意到 (7) 隐含: 可简单的置 $\rho=1$, 然后计算 $\tilde{f}(\rho,\varphi,\theta)=f(\varphi,\theta)$ (在空间) 的 Laplace. 这种计算正好就是如例 1 那样, 除了 $\rho=1$ 以及 $U_{\rho\rho}+2\rho^{-1}U_\rho=6\rho\cos\varphi\sin^2\varphi\sin(2\theta)$①不再出现, 因 $\tilde{f}$ 与 ρ 无关. 于是, 例 1 中的计算导出结果 $\triangle_s f=-6\rho\cos\varphi\sin^2\varphi\sin(2\theta)=-12f$. □

> **定义** 定义在单位球面上的 C^2 函数 $f(\varphi,\theta)\not\equiv 0$, 使得对某个常数 λ 有 $\triangle_s f+\lambda f=0$, 则称是**球面调和的**.

换言之, 球面调和函数是单位球面上 Laplace 算子 $\triangle_s$ 的特征函数, 相应的常数 λ 是 $\triangle_s$ 的特征值. 在例 2 中我们求得 $\frac{1}{2}\cos\varphi\sin^2\varphi\sin(2\theta)$ 是特征值 12 的球面调和函数.

例 3 设 $f=f(\varphi,\theta)$ 是定义在球面上的 C^2 函数, 满足 $\triangle_s f+\lambda f=0$. 如果 $\lambda<0$, 则证明 $f=0$, 而如果 $\lambda=0$, 证明 f 必为常数. 换言之, 证明 $\triangle_s$ 的特征值是非负的, 具特征值 0 的唯一特征函数 (球面调和) 是不为零的常值函数.

解 由假设, 得 $\lambda f^2=-f\triangle_s f$. 如果对该式两边在球面上积分, 得

$$\lambda\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\varphi,\theta)^2\sin\varphi d\varphi d\theta=-\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\varphi,\theta)\big((\sin\varphi f_\varphi)_\varphi+\frac{1}{\sin\varphi}f_{\theta\theta}\big)d\varphi d\theta$$

$$=-\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\varphi,\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\varphi f_\varphi)d\varphi d\theta-\int_0^{\pi}\frac{1}{\sin\varphi}\big(\int_0^{2\pi}ff_{\theta\theta}d\theta\big)d\varphi$$

①原文误为 $U_\rho+2\rho^{-1}U_\rho=6\rho\cos\varphi\sin^2\varphi\sin 2\theta$.——译者

$$= -f\sin\varphi f_\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(f_\varphi)^2\sin\varphi d\varphi d\theta - \int_0^{\pi}\frac{1}{\sin\varphi}\Big((ff_\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$

$$- \int_0^{2\pi}(f_\theta)^2 d\theta\Big)d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Big((f_\varphi)^2 + \frac{1}{\sin^2\varphi}(f_\theta)^2\Big)\sin\varphi d\theta d\varphi \geqslant 0,$$

其中已对 φ 和 θ 分部积分, 并利用 ff_θ 是 θ 的周期函数以及在 $[0,\pi]$ 上 $\sin\varphi \geqslant 0$ 的事实. 为证明交换积分次序是正当的, 已利用 $\triangle_s f(\varphi,\theta)$ 可连续延拓到 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = \pi$, 因对 C^2 函数 f, $\triangle_s f$ 在球面上是连续的. 量

$$(f_\varphi)^2 + \frac{1}{\sin^2\varphi}(f_\theta)^2$$

是梯度

$$\nabla f \equiv f_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\sin\varphi}f_\theta \mathbf{e}_\theta$$

的长度的平方, 其中 $\mathbf{e}_\varphi$ 和 $\mathbf{e}_\theta$ 分别是 φ 和 θ 增加方向的单位向量. 换句话说, 记 $dA = \sin\varphi d\varphi d\theta$, 并用 $\int_S$ 表示在球面上积分, 我们已经证明

$$\lambda\int_S f^2 dA = -\int_S f\triangle_s f dA = \int_S \|\nabla f\|^2 dA \geqslant 0. \tag{8}$$

因此, 如果 λ 是负的, 则 $f = 0$(为什么?). 另外, 如果 $\lambda = 0$, 则 $\|\nabla f\| = 0$, 这时 f 必是常数 (为什么?). □

注记 在第 8.4 节我们将求出所有球面调和函数. 有无穷多个球面调和函数, 且每个都是 $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的多项式. 而且, 还证明不仅 $\triangle_s$ 的特征值是非负的, 且必具形式 $\lambda = n(n+1)$, 对某个 $n = 0,1,2,3,\cdots$. (注意到, 对例 2 中的球面调和函数, $\lambda = 12 = 3(3+1)$.) 这些特征值应该与单位圆盘上 Laplace 算子 $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ 的特征值 n^2($n = 0,1,2,\cdots$) 比较, 后者特征函数是 $\sin(n\theta)$ 和 $\cos(n\theta)$.$\triangle_s$ 的特征值 $n(n+1)$ 出现在原子的量子力学中. 的确, 在量子力学中, 算子 $-\hbar^2\triangle_s$(其中 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ 且 $h \approx 6.6\times10^{-27}\mathrm{erg\cdot sec}$ 是 Planck 常数) 称为轨道角动量的平方, 它作用在 Schrödinger 波函数上. $\hbar^2\triangle_s$ 的特征值通常由 $\hbar l(l+1)$, $l = 0,1,2,\cdots$ 表示, 且解释为在一个原子中的电子轨道角动量长度的平方的可能离散度量. 在第 8.5 节将更详细地考虑氢原子中的电子的量子力学. □

空间的 Laplace 算子的特征函数

在第 8.2 节中已经看到 Laplace 算子的特征函数可用来轻松构成热方程和波方程的解. 这里我们来寻求 F 具有形式 $F(\rho,\varphi,\theta)=R(\rho)f(\varphi,\theta)$①的特征函数 (使得对某个常数 c, $\triangle F+cF=0$). 根据 (2) 和 (7), 有

$$\begin{aligned}\triangle F&=\frac{1}{\rho^2}\Big((\rho^2F_\rho)_\rho+\frac{1}{\sin\varphi}(\sin\varphi F_\varphi)_\varphi+\frac{1}{\sin^2\varphi}F_{\theta\theta}\Big)\\&=\frac{1}{\rho^2}\Big[f(\varphi,\theta)(\rho^2R'(\rho))'+R(\rho)\Big(\frac{1}{\sin\varphi}(\sin\varphi f_\varphi)_\varphi+\frac{1}{\sin^2\varphi}f_{\theta\theta}\Big)\Big]\\&=\frac{1}{\rho^2}\big(f(\varphi,\theta)(\rho^2R'(\rho))'+R(\rho)\triangle_s f\big).\end{aligned}$$

因此, 特征方程 $\triangle F+cF=0$ 变成

$$\frac{1}{\rho^2}\big((\rho^2R'(\rho))'f(\varphi,\theta)+R(\rho)\triangle_s f(\varphi,\theta)\big)+cR(\rho)f(\varphi,\theta)=0$$

或

$$\frac{(\rho^2R'(\rho))'}{R(\rho)}+c\rho^2=\frac{-\triangle_s f(\varphi,\theta)}{f(\varphi,\theta)}. \tag{9}$$

这个式子的每边必是常数, 记作 λ. 因此, 得到两个方程

$$(\rho^2R'(\rho))'+(c\rho^2-\lambda)R(\rho)=0 \tag{10}$$

和

$$\triangle_s f(\varphi,\theta)+\lambda f(\varphi,\theta)=0. \tag{11}$$

特别, 这表明函数 $F=R(\rho)f(\varphi,\theta)$ 的**角度部分**$f(\varphi,\theta)$ 必是单位球上的 Laplace 算子 $\triangle_s$ 的 (具某个特征值) 特征函数 (即 $f(\varphi,\theta)$ 必是球面调和的). 归纳起来, 我们有如下的定理.

定理 1 $F(\rho,\varphi,\theta)=R(\rho)f(\varphi,\theta)$ 是 Laplace 算子 (在空间上) 具特征值 c 的特征函数 (即, $\triangle F+cF=0$) 当且仅当 $f(\varphi,\theta)$ 是具特征值 λ 的球面调和函数(即 $\triangle_s f+\lambda f=0$), 且 $R(\rho)$ 是方程 (10) 的解.

①原文误为 $F(\rho,\varphi,\theta)=R(\rho)f(\theta,\varphi)$.——译者

注记 特征方程 $\triangle F + cF = 0$ 称为 **Helmholtz 方程**. [德国生理学家和物理学家 Hermann Ludwig ferdinand von Helmholtz (1821—1894) 在电子理论、光学和数学方面作出基础性进展. 是他首先度量出神经脉冲速度的.] □

回忆到 $\frac{1}{\rho}$ 对 $\rho > 0$ 定义了一个调和函数. 因此, 当 $c = 0$ 和 $\lambda = 0$ 时, $\frac{1}{\rho}$ 必是 (10) 的解. 于是, 当 c 是任意时, 自然去尝试形如 $R(\rho) = g(\rho)/\rho$ 的解. 则有 $(\rho^2 R'(\rho))' = (\rho g'(\rho) - g(\rho))' = \rho g''(\rho)$. 因此, (10) 变成 $\rho g''(\rho) + (c\rho - \lambda/\rho) g(\rho) = 0$, 且有

$$R(\rho) = \frac{g(\rho)}{\rho}, \quad \text{如果} \quad g''(\rho) + \big(c - \frac{\lambda}{\rho^2}\big) g(\rho). \tag{12}$$

现在我们考虑两种情形, 即 $\lambda = 0$ 和 $c = 0$. 当 $c = 0$ 时, 方程 $g'' - \lambda \rho^{-2} g = 0$ 的形式提示我们尝试形如 $g(\rho) = \rho^m$ 的解. 则得 $[m(m-1) - \lambda]\rho^{m-2} = 0$. 最终求得 $\triangle_s$ 的特征值 λ 具有形式 $(n+1)n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. 因此, 当 $c = 0$ 时, 取 $m = n + 1$ 和 $-n$, 且

$$R_n(\rho) = a_n \rho^n + b_n \rho^{-(n+1)} \quad \text{对} \quad c = 0 \quad \text{和} \quad \lambda_n = n(n+1),\ n = 0, 1, \cdots. \tag{13}$$

当 $\lambda = 0$ 和 $c = \pm 1$ 时, 由 (12), 得以下函数

$$\begin{aligned} R_0^-(\rho) &= \tfrac{1}{\rho}(a_0 e^{\rho} + b_0 e^{-\rho}) & \lambda = 0,\ c = -1, \\ R_0^+(\rho) &= \tfrac{1}{\rho}(a_0 \cos\rho + b_0 \sin\rho) = \tfrac{A}{\rho}\sin(\rho + \delta), & \lambda = 0,\ c = 1, \end{aligned} \tag{14}$$

满足 (10), 其中 a_0, b_0, A 和 δ 是任意常数. 对 $c \neq 0$, 设为 $c = \pm b^2$, $b > 0$, 得 (10) 的两个解 $R_0^+(b\rho)$ 和 $R_0^-(b\rho)$. 的确, 这是一般的事实: 如果 $R(\rho) f(\varphi, \theta)$ 是 $\triangle$ 具特征值 ± 1 的特征函数, 则 $R(b\rho) f(\varphi, \theta)$ 是具特征值 $\pm b^2$ 的特征函数 (参看习题 4). 在一般情形 ($\lambda = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, $c = \pm b^2 \neq 0$), (10) 的通解公式是

$$R_n^{\pm}(\rho) \equiv \rho^n \big(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\big)^n [R_0^{\pm}(\rho)],\ b > 0. \tag{15}$$

我们在第 8.4 节导出该公式 (参看定理 5).

例 4 (空间径向热方程和波方程) 求三维热方程和波方程所有 (对 $\rho > 0$ 有效) 的解, 这些解具有形式 $R(\rho)T(t)$, 且当 t 和 ρ 趋于 $+\infty$ 时是有界的.

解 把 $R(\rho)T(t)$ 分别代入热方程 $u_t = k\triangle u$ 和波方程 $u_{tt} = a^2\triangle u$, 然后分离变量, 得

$$\frac{T'}{kT} = \frac{\triangle R}{R} = -c \quad 和 \quad \frac{T''}{a^2 T} = \frac{\triangle R}{R} = -c.$$

因此, $R(\rho)$ 是 $\triangle$ 具特征值 c 的特征函数. 由定理 1, 对 $c = \pm b^2 \neq 0$, $R(\rho)$ 是函数 $R_0^{\pm}(b\rho)$ 之一, 或当 $c = 0$ 时, $R(\rho)$ 是稳态解 $A\rho^{-1} + B$. 根据有界性假设, 得 (对任意常数 A, γ 和 δ)

对热方程:

$$u = \frac{A}{\rho}\sin(b\rho + \delta)e^{-b^2kt}, \quad c = b^2 > 0. \tag{16}$$

对波方程:

$$u = \begin{cases} \frac{A}{\rho}e^{-b(\rho + at)}, & c = -b^2 < 0; & (17) \\ \frac{A}{\rho}\sin(b\rho + \delta)\sin(bat + \gamma), & c = b^2 > 0, & (18) \end{cases}$$

每个方程当 $c = 0$ 时存在稳态解. 解 (16)[或 (18)] 仅当 $\delta = 0$ 时是 C^∞, 可用来解热 (或波) 问题, 其中温度 (或波的振幅) 假设与 φ 和 θ 无关, 比如在一匀质球内, 其中球面边界条件是绝热的或保持常温 (或在边界上振幅的法向导数为零或振幅是常数) 以及初始温度分布 (或初始振幅和初始速度分布) 只依赖于 ρ(参看下面的例 5 和习题 8∼ 习题 10). 对依赖于 φ 或 θ 的初始数据将通过利用 $\lambda = n(n+1)$, $n > 0$ 的球调和 (参看例 6 和第 8.4 节的习题 17∼ 习题 20). 注意到在每一时刻 t, 与 Coulomb 或重力位势 ρ^{-1} 对比, 解 (17) 与著名的关于短程核威力的**Yukawa 位势** $\rho^{-1}e^{-b\rho}$($b > 0$) 成比例是有趣的. □

注记 从导出 (12) 的考虑, 可见如果假设解具有形式 $U(\rho, t) = g(\rho, t)/\rho$, 则热方程 $U_t = k\rho^{-2}(\rho^2 U_\rho)_\rho$ 变成 $g_t = kg_{\rho\rho}$, 而波方程 $U_{tt} = a^2\rho^{-2}(\rho^2 U_\rho)_\rho$ 变成 $g_{tt} = a^2 g_{\rho\rho}$. 因此, 如果知道某个热问题或波问题的解与角度无关, 则这种问题化为在第三章和第五章考虑过的一维情形, 如下面的例 5 所说明的. 然而, 如果一问题在 B.C. 或 I.C. 中与角度有关, 则这种技巧就失效, 会需要牵涉到球面调和函数的更一般的方法.

例 5 (球内的温度) 考虑直径为 1 的实体匀质球, 具有热传导系数 k. 对 $t > 0$, 球的表面保持温度 0, 并有常数初始温度分布 $U(\rho, 0) = 100°\text{C}$. 求温度 $U(\rho, \varphi, \theta, t)$ 形式级数解.

解 因在边界条件或在初始温度中与角度无关, 故形式解 $U(\rho,t)$ 不含有 φ 和 θ 且形式满足

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad U_t=k\frac{1}{\rho^2}(\rho^2U_\rho)_\rho,\quad 0<\rho\leqslant\frac{1}{2},\quad t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad U(\frac{1}{2},t)=0;\\&\text{I.C.}\quad U(\rho,0)=100.\end{aligned}$$

记 $U(\rho,t)=g(\rho,t)/\rho$, 根据上面的注记, 该问题等价于

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad g_t=kg_{\rho\rho},\quad 0\leqslant\rho\leqslant\frac{1}{2},\quad t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad g(0,t)=0,\quad g(\frac{1}{2},t)=0;\\&\text{I.C.}\quad g(\rho,0)=100\rho.\end{aligned}$$

这个新问题是熟悉的一维问题. 把 $g(\rho,0)=100\rho$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上展成 Fourier 正弦级数然后插入与时间有关的指数因子, 形式上得到

$$U(\rho,t)=\frac{g(\rho,t)}{\rho}=\frac{100}{\pi\rho}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}e^{-4n^2\pi^2kt}\sin(2n\pi\rho)\Big).$$

注意到对大的 t, 第一项是可控的, 且

$$U(\rho,t)\approx\frac{100}{\pi\rho}e^{-4\pi^2kt}\sin(2\pi\rho),\ \text{当}\ t\to\infty.$$

特别, 在球心的温度是 $\approx 200e^{-4\pi^2kt}$(为什么?). 回忆到在单位正方体中心的相应温度是 $6400\pi^{-3}e^{-3\pi^2kt}\approx 206.4e^{-3\pi^2kt}$. 因 $-4\pi^2kt<-3\pi^2kt$, 故球心最终将比正方体中心冷却要快得多. 这是预料到的, 因为直径为 1 的球可置入单位方体的内部. 然而, 如果球的半径取作 $(\frac{3}{4\pi})^{\frac{1}{3}}$, 使得它的体积与单位正方体的体积相同, 则可验证球心最终将比正方体中心冷却要慢 (参看习题 7). □

例 6 (空间 D'Alembert 公式) 由形式计算, 求以下空间波问题解的 D'Alembert 公式的对应公式.

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}),\quad -\infty<x,\ y,\ z,\ t<\infty;\\&\text{I.C.}\quad u(x,y,z,0)=f(x,y,z),\quad u_t(x,y,z,0)=g(x,y,z).\end{aligned}\tag{19}$$

解　作形式运算, 运用 Fourier 变换方法. 在 D.E. 的两边取三维 Fourier 变换, 得

$$\hat{u}_{tt}(\xi,\eta,\zeta,t) = -a^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\hat{u}(\xi,\eta,\zeta,t),$$

于是

$$\begin{aligned}\hat{u}(\xi,\eta,\zeta,t) = &\ \hat{u}(\xi,\eta,\zeta,0)\cos(at\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}) \\ &+\hat{u}_t(\xi,\eta,\zeta,0)\frac{\sin(at\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2})}{a\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}.\end{aligned}$$

利用 $\hat{u}(\xi,\eta,\zeta,0) = \hat{f}(\xi,\eta,\zeta)$ 和 $\hat{u}_t(\xi,\eta,\zeta,0) = \hat{g}(\xi,\eta,\zeta)$, 以及形式运用空间函数 Fourier 变换的反演定理 (即, 三次运用一维反演定理, 每次对一个空间变量), 有

$$\begin{aligned}u(x,y,z,t) = &\ (2\pi)^{-3/2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\hat{f}(\xi,\eta,\zeta)\cos(at\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2})) \\ &e^{i(\xi x+\eta y+\zeta z)}d\xi d\eta d\zeta \\ &+(2\pi)^{-3/2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\hat{g}(\xi,\eta,\zeta)\frac{\sin(at\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2})}{a\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}) \\ &e^{i(\xi x+\eta y+\zeta z)}d\xi d\eta d\zeta.\end{aligned} \tag{20}$$

回忆到一维波问题的 D'Alembert 公式 (参看第 5.2 节) 不涉及初始数据 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的 Fourier 变换, 因此我们希望消去形式解 (20) 中的 Fourier 变换. 注意到 (20) 的第一个积分恰好是第二个积分以 f 替换 g 后关于时间的导数. 因此, 我们将简化第二个积分, 然后对结果取时间的导数得到第一个积分. 我们有

$$g(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = (2\pi)^{-3/2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\xi,\eta,\zeta)e^{-i(\xi x+\eta y+\zeta z)}d\xi d\eta d\zeta. \tag{21}$$

现把 (20) 中的正弦项写成指数形式且同时消去分母. 令 $\omega \equiv \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$. 根据 (14) 和 (15), $n=0$, $\delta=0$ 和 $b=|at|$ 及定理 1, (20) 中的函数 $\sin(at\omega)/(a\omega)$ 是 $\bar{\triangle} \equiv \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}$ 具特征值 $(at)^2$ 的球对称特征函数. 对任意固定的点 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 满足 $\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2}=|at|$, 我们有 $\exp[-i(\bar{x}\xi+\bar{y}\eta+\bar{z}\zeta)]$ 是 $\bar{\triangle}$ 具特征值 $(at)^2$ 的另一个特征函数, 它不是球对称的 (为什么?). 然而, 通过在 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$–空间的球面 $\bar{\rho}=|at|$ 上积分 (即, 在球面方向取平均), 得到具特征值 $(at)^2$ 的球对称特征函数 (参看下面 (22) 中的第一个积分). 而且, 由于具相同特征值的任意两个球对称非零的特征函数具有常数比 (由定理 1 和 (14)), 故得 (对某个不依

赖于 (ξ,η,ζ) 但可能依赖于 t 的 $C(t)$)

$$\begin{aligned}\frac{\sin(at\omega)}{a\omega} &= C(t)\int_{\bar\rho=|at|} e^{-i(\bar x\xi+\bar y\eta+\bar z\zeta)}d\bar A\\ &= C(t)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\exp\big(-i|at|(\xi\sin\bar\varphi\cos\bar\theta+\eta\sin\bar\varphi\sin\bar\theta\\ &\quad+\zeta\cos\bar\varphi)\big)(at)^2\sin\bar\varphi d\bar\varphi d\bar\theta.\end{aligned} \tag{22}$$

(22) 两边当 $\omega\to 0^+$ 时形式取极限, 必有 $t = C(t)(at)^2 4\pi$, 或 $C(t)=(4\pi a^2 t)^{-1}$. 把这个 $C(t)$ 代入 (22), 得

$$\frac{\sin(at\omega)}{a\omega} = \frac{t}{4\pi(at)^2}\int_{\bar\rho=|at|} e^{-i(\bar x\xi+\bar y\eta+\bar z\zeta)}d\bar A. \tag{23}$$

因此, (20) 中第二个积分, 记作 $I(x,y,z,t)$, 变成

$$\begin{aligned}&I(x,y,z,t)\\ &=(2\pi)^{-3/2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat g(\xi,\eta,\zeta)\Big(\frac{t}{4\pi(at)^2}\\ &\quad\int_{\bar\rho=|at|}e^{-i(\bar x\xi+\bar y\eta+\bar z\zeta)}d\bar A\Big)e^{i(\bar x\xi+\bar y\eta+\bar z\zeta)}d\xi d\eta d\zeta\\ &=t\frac{1}{4\pi(at)^2}\int_{\bar\rho=|at|}\Big[(2\pi)^{-3/2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\\ &\quad\hat g(\xi,\eta,\zeta)e^{i[\xi(x-\bar x)+\eta(y-\bar y)+\zeta(z-\bar z)]}d\xi d\eta d\zeta\Big]d\bar A\\ &=t\frac{1}{4\pi(at)^2}\int_{\bar\rho=|at|}g(x-\bar x,y-\bar y,z-\bar z)d\bar A\equiv tM_g(x,y,z;|at|),\end{aligned} \tag{24}$$

其中我们形式上交换了积分次序以及运用了反演定理 (即 (21)). 由最后的等式定义的函数 $M_g(x,y,z;|at|)$ 是函数 g 在中心为 (x,y,z) 半径是 $|at|$ 的球面上的中值 (平均). 因此, 在该球面上点的这些初始分布在时刻 t 内将到达球心 (x,y,z). 因此, $I(x,y,z,t)$ 是所有与 (x,y,z) 相距 $|at|$ 的点的初始速度源的叠加. 可这样考虑: 由于半径为 $|at|$ 的球面的面积是 $4\pi a^2t^2$, 则 $M_g(x,y,z;|at|)$ 应该有因子 t^2 相乘, 但从例 4 注意到由一点引发的球对称波的振幅以与源点的距离成反比递减. 于是只保留 t 的一个因子. 如我们所提及的, (20) 的第一个积分只是以 f 替换 g 的第二个积分的导数. 因此, 当 $t>0$ 时, 问题 (19) 的形式解由以下空间 **D'Alembert** 公式给出:

$$u(x,y,z,t)=\frac{d}{dt}\big(tM_f(x,y,z;|at|)\big)+tM_g(x,y,z;|at|). \tag{25}$$

如果 f 是 C^2 以及 g 是 C^1 的, 可验证 (参看习题 13)(25) 确实是问题 (19) 的一个 C^2 解. □

注记 解 (25) 有一个很重要的性质, 它是一维 D'Alembert 解

$$\frac{1}{2}\big(f(x+at)+f(x-at)\big)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(r)dr \tag{26}$$

没有的. 注意到 (25) 只依赖于 g 距离 (x,y,z) 正好是 $|at|$ 的球壳上的点的值. 然而, (26) 依赖于 g 在距 x 点小于或等于 $|at|$ 点的值 (即在第 5.2 节中讨论的依赖区间中的点). 在一维情形, 从点 P 发出到达 P' 点的速度分布在到达之后仍有作用, 然而, 在三维情形, 这种作用只在到达的瞬间且没有余效 (余波). 因此, 在三维可发送清晰的信号, 但在一维会出现余波. 实际上在一维情形由于余波造成的混乱不是太严重, 因为一旦信号的瞬时部分传过, 它的延续作用是常量 (即, 对固定的 x, (26) 中的积分最终是常数, 如果 g 在某个小区间之外为零的话), 这意味着用无线电有效的通讯是可能的. 然而, 在二维情形, 也有余波, 且余波最终不是常量. 的确, **二维 D'Alembert 解**的类似公式是 (参看习题 14)

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int\int_{\bar r\leqslant|at|}\frac{f(x-\bar x,y-\bar y)}{\sqrt{a^2t^2-\bar r^2}}d\bar x d\bar y\right]$$
$$+\frac{1}{2\pi a}\int\int_{\bar r\leqslant|at|}\frac{g(x-\bar x,y-\bar y)}{\sqrt{a^2t^2-\bar r^2}}d\bar x d\bar y,\qquad \bar r\equiv\sqrt{\bar x^2+\bar y^2}. \tag{27}$$

(27) 中的分母依赖于 t 隐含在二维情形余波最终不是常量, 因此在这种情形信号 (比如电学的或声学的) 的清晰传递是不可能的. 信号以明确的像波阵面的扩展外形传播的叙述称为**Huygens 原理**. 因此, Huygens 原理对三维波方程成立, 但在二维不成立 (每个偶数维也不成立, 参看 [Courant 和 Hilbert, p.690]). 还应注意到公式 (23) 在二维情形不成立 (为什么?), 公式 (23) 是导出 (25) 的关键. □

概要 8.3

1. 球坐标的 Laplace 算子: 对 $u(x,y,z)=U(\rho,\varphi,\theta)$, 如同命题 1, 有

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=\frac{1}{\rho^2}\big((\rho^2U_\rho)_\rho+\frac{1}{\sin\varphi}(\sin\varphi U_\varphi)_\varphi+\frac{1}{\sin^2\varphi}U_{\theta\theta}\big).$$

2. 单位球面上的 Laplace 算子 $\triangle_s$: 对单位球面上的 C^2 函数 $f(\varphi,\theta)$,

$$\triangle_s f(\varphi,\theta)=\triangle f(\rho,\varphi,\theta)\Big|_{\rho=1}=\frac{1}{\sin\varphi}\,[\sin\varphi f_\varphi]_\varphi+\frac{1}{\sin^2\varphi}f_{\theta\theta},$$

其中 $f(\rho,\varphi,\theta)=f(\varphi,\theta)$ 是 f 的延拓, 它在径向为常值.

3. 空间 Laplace 算子的特征函数: 根据定理 1, $F(\rho,\varphi,\theta)=R(\rho)f(\varphi,\theta)$ 是 Laplace 算子 $\triangle$(在空间上) 具特征值 c 的特征函数 (即, $\triangle F+cF=0$) 当且仅当 $f(\varphi,\theta)$ 是具特征值 λ 的球面调和的 (即 $\triangle_s f+\lambda f=0$), 且 $R(\rho)$ 是以下方程的解

$$(\rho^2R'(\rho))'+(c\rho^2-\lambda)R(\rho)=0. \tag{S1}$$

如同将证明的 (参看第 8.4 节的定理 1′), 特征值 λ 具有形式 $n(n+1)$, $n=0,1,2,\cdots$, 且对每个这样的 n, 存在 $2n+1$ 个在第 8.4 节中所描述的线性无关的球面调和函数. 而且, 在第 8.4 节的定理 5 中我们证明了如果 $\lambda=n(n+1)$ 和 $c=\pm b^2\neq 0$, 则 (S1) 的通解是 $R_n^\pm(b\rho)$, 这里

$$R_n^\pm(b\rho)\equiv\rho^n(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho})^n[R_0^\pm(\rho)],\quad b>0,\quad 和\quad \begin{cases}R_0^-(\rho)=\frac{1}{\rho}(a_0e^\rho+b_0e^{-\rho}),\\ R_0^+(\rho)=\frac{1}{\rho}(a_0\cos\rho+b_0\sin\rho),\end{cases}$$

其中 a_0 和 b_0 是任意常数. 当 $c=0$, 具 $\lambda=n(n+1)$ 的 (S1) 的通解是 $a\rho^n+b\rho^{-(n+1)}$.

4. 应用: 在例 4, 我们求得径向热流和空间波的传播的乘积解, 在球内的径向热流包含在例 5 中. 例 6 导出空间中任意波的传播的 D'Alember 公式 (25). 该公式表明 Huygen 原理在三维中成立.

练习 8.3

1. 用球坐标表示以下函数 $u(x,y,z)$, 并利用命题 1 中 (2), 通过以球坐标计算 Laplace 运算(即 $\triangle u=0$)来验证这些函数是调和的.

(a) $u(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$, (b) $u(x,y,z)=x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$

(c) $u(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2$, (d) $u(x,y,z)=z^3-3zx^2$.

2. 假设 (x,y,z) 限制在单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$(或 $\rho=1$) 上. 则用球面上 φ 和 θ 坐标写出习题 1 中的函数. 在每种情形, 验证导致的函数 $f(\varphi,\theta)$ 是球面调和的 (即对某个常数 $\lambda\geqslant 0$, $\triangle_s f+\lambda f=0$). λ 具有 $n(n+1)$, $n=0,1,2,\cdots$ 形式吗?

3. 计算 $\triangle_s(\sin\varphi)$. $\sin\varphi$ 在单位球面上是 C^2 吗? 是 C^1 吗? 是连续吗?

4. (a) 证明: 如果 $f(x,y,z)$ 是 $\triangle$ 具特征值 c 的特征函数 (即, $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}+cf=0$, $f\neq 0$), 则函数 $g(x,y,z)=f(bx,by,bz)$($b\neq 0$) 是 $\triangle$ 具特征值 b^2c 的特征函数.

(b) 利用 (a) 部分和定理 1 推断: 如果 $R(\rho)S(\varphi,\theta)$ 是 $\triangle$ 具特征值 ± 1 的特征函数, 且 $\triangle_s S+\lambda S=0$, 则 $r(\rho)=R(b\rho)$ 满足 $c=\pm b^2$ 的方程 (10).

(c) 直接证明, 如果 $R(\rho)$ 满足 $c=\pm 1$ 的 (10), 则 $r(\rho)$ 满足 $c=\pm b^2$ 的 (10).

5. (a) 利用例 5 中相同的想法, 证明 $\frac{d^2}{d\theta^2}$ 在单位圆周上非常值的 C^2 特征函数 $f(\theta)$(即 $f''+\lambda f=0$) 必有非负特征值.

(b) 证明 (a) 部分中 $\frac{d^2}{d\theta^2}$ 的特征值必具有 n^2, $n=0,1,2,\cdots$ 形式.

6. 已知在任意无边光滑曲面 T 上 (例如, 球面或圆环面), 在该曲面上的 Laplace 算子是唯一的算子 $\triangle$, 使得对所有在 T 上的 C^2 函数 f 和 g, 满足

$$\int_T f\triangle g dA=-\int_T \nabla f\cdot\nabla g dA,$$

其中 dA 是 T 上的面积元, ∇f 表示 f 在 T 上的梯度 (该公式的证明基于散度定理, 参看练习 8.6 的习题 11). 证明 $\triangle$ 在 T 上非常值的特征函数具有正特征值.

7. 假设在例 5 中球的半径变成 $(\frac{3}{4\pi})^{\frac{1}{3}}$, 使得体积为 1. 在例 5 的条件下证明, 在这种情形下在单位方体的中心冷却则比在球心冷却更迅速 (对大的 t).

8. 把 $u(x,y,z,t)$ 表示成 $U(\rho,t)$, 在球 $\rho\leqslant 1$ 上求解具初始温度分布 $U(\rho,0)=\rho^{-1}\sin^3(\pi\rho)$ 和 B.C.$U(1,t)=0$ 的热方程 $u_t=k\triangle u$.

9. (a) 记 $U(\rho,t)=g(\rho,t)/\rho$, 把以下绝热单位球的热问题转换成关于未知函数 $g(\rho,t)$ 的一维热问题.

$$\text{D.E.}\quad U_t=k\frac{1}{\rho^2}(\rho^2U_\rho)_\rho,\quad 0<\rho<1,\quad t>0;$$

$$\text{B.C.}\quad U_\rho(1,t)=0;$$

$$\text{I.C.}\quad U(\rho,0)=f(\rho).$$

(b) 在 (a) 部分求出关于 $g(\rho,t)$ 的新问题, 求满足关于 $g(\rho,t)$ 问题的 D.E. 和 B.C. 的乘积解 $R(\rho)T(t)$ 的径向部分 $R(\rho)$ 的 Sturm-Liouville 问题 (参看第 4.4 节). 什么方程确定特征值?特征函数是什么?(务必考虑 $\lambda \leqslant 0$.) 假设 $\rho f(\rho)$ 可用特征函数和来逼近, 怎样能获得在 (a) 中原问题的解?

10. 对波方程情况重做习题 9:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad U_{tt}=a^2\frac{1}{\rho^2}(\rho^2U_\rho)_\rho,\quad 0<\rho<1,\quad -\infty<t<\infty;\\&\text{B.C.}\quad U_\rho(1,t)=0,\\&\text{I.C.}\quad U(\rho,0)=f(\rho),\quad U_t(\rho,0)=0.\end{aligned}$$

11. (a) 假设在习题 9(a) 中去掉 B.C. 使得结果成为在整个空间上的径向对称热流问题. 利用半无限杆一维热方程的积分解来解关于 $g(\rho,t)$ 的相应问题.

(b) 通过把问题转化成可运用 D'Alembert 公式的一维波问题来解以下在整个空间上径向对称波问题:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad U_{tt}=a^2\frac{1}{\rho^2}(\rho^2U_\rho)_\rho,\quad 0<\rho<\infty;\\&\text{I.C.}\quad U(\rho,0)=f(\rho),\quad U_t(\rho,0)=h(\rho).\end{aligned}$$

验证你的答案与直接利用空间 D'Alembert 公式 (25) 获得的一致.

12. (a) 对任意复数 c 证明

$$U(\rho)=\frac{e^{c\rho}}{\rho}\quad(\rho>0)$$

是 $\triangle$ 具特征值 $-c^2$ 的特征函数 (即 $\triangle U-c^2U=0$).

(b) 推断

$$V(\rho,t)=\frac{e^{kc^2t+c\rho}}{\rho}\quad(\rho>0)$$

满足热方程 $v_t=k\triangle v$.

(c) 对某实数 α, 令 $c=\alpha(1+i)$, 考虑 (b) 部分中 $V(\rho,t)$ 的实部. 对某个 δ, 以 $t+\delta$ 替换 t, 求 $\rho>\rho_0$ 的热方程 $u_t=k\triangle u$ 的解 $U(\rho,t)$, 使得 $U(\rho_0,t)=\cos(\omega t)$ 以及当 $\rho\to\infty$ 时 $U(\rho,t)\to 0$.

(d) 通过去掉条件 $U(\rho,t)\to 0,\ \rho\to\infty$, 求热方程 $u_t=k\triangle u$ 的解 $U(\rho,t)$, 使得 $U(\rho_0,t)=\cos(\omega t)$, 其中 u 是球 $\rho\leqslant\rho_0$ 上的 C^2 函数, 甚至在 $\rho=0$ 处也是 C^2 的.

提示 为消除在 $\rho=0$ 处的奇异性行为, 考虑关于两个可能相反值的 α 的解的差.

13. 当 $f(x,y,z)$ 是 C^3 和 $g(x,y,z)$ 是 C^2 时, 直接验证 (25) 确实满足三维波问题 (19).

提示 利用中心在 (x,y,z) 的球坐标.

14. 由形式计算 (或利用习题 13 的假设), 通过利用在 f 和 g 与 z 无关的情形下三维解 (25) 来获得二维波问题的解 (27). 这种由高维问题的解获得低维问题的解的技巧称为**降维法**.

§8.4 球面调和函数, Laplace 级数及其应用

在本节将求出所有的球面调和函数 (即 $\triangle_s$ 的特征函数), 并证明在球面上任一 C^2 函数能写成球面调和函数的一致收敛级数 (Laplace 级数). 这种在球面上函数的 Laplace 级数类似于圆周上函数的 Fourier 级数. 它用于涉及当解显然依赖于角度时的球坐标的边值问题, 如在以下例子中所展示的.

例 1 证明如果 $U(\rho,\varphi,\theta) = R(\rho)f(\varphi,\theta)$ 是空间 Laplace 方程 $\triangle U = 0$ 的解, 则 $f(\varphi,\theta)$ 必是球面调和的. 利用该事实通过以球坐标写出 Laplace 方程 $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$ 的某些显然的解 (如,x, y, z; xy, yz, x^2-y^2, y^2-z^2, z^2-x^2) 来找出一些球面调和函数. 以这种方式求得的球面调和函数的特征值是什么?

解 如果 $U(\rho,\varphi,\theta) = R(\rho)f(\varphi,\theta)$ 满足 Laplace 方程 $\triangle U = 0$ 且 $U \neq 0$, 则 U 是 $\triangle$ 具特征值 $c=0$ 的特征函数 (即, $\triangle U + 0\cdot U = 0$). 于是, 由第 8.3 节的定理 1, $f(\varphi,\theta)$ 必是球面调和的. 利用第 8.3 节的变换式 (1), 有

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta \quad 和 \quad z = \rho\cos\varphi. \tag{1}$$

因此, 函数 $\sin\varphi\cos\theta$, $\sin\varphi\sin\theta$, $\cos\varphi$ 都是球面调和的. 作为验证, 来计算 $\sin\varphi\cos\theta$ 的 $\triangle_s$. 由第 8.3 节的公式 (7), 得

$$\begin{aligned}\triangle_s[\sin\varphi\cos\theta] &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta) + \frac{1}{\sin^2\varphi}(-\sin\varphi\cos\theta)\\ &= \frac{1}{\sin\theta}(1-2\sin^2\varphi)\cos\theta - \frac{1}{\sin\varphi}\cos\theta = -2(\sin\varphi\cos\theta).\end{aligned}$$

因此, $\sin\varphi\cos\theta$ 确实是 $\triangle_s$ 的特征函数且特征值是 2. 可验证 $\sin\varphi\sin\theta$ 和 $\cos\varphi$ 也具有特征值 2, 但实际上我们可从球对称性推得该结果. 的确, 关于直线 $x=y=z$ 旋转 $120°$ 的一个空间旋转, 把点 (x,y,z) 变成 (y,z,x), 于是函数 x 变成 y, y 变成 z 和 z 变成 x. 因算子 $\triangle$ 和 $\triangle_s$ 是旋转不变的, 故由对称性得到这

些函数的每个函数有相同的特征值, 即 2. 有无穷多具特征值 2 的其他特征函数, 但下面的定理 1′ 意味着这些特征函数都可通过组成线性组合 $c_1 \sin\varphi\cos\theta + c_2\sin\varphi\sin\theta + c_3\cos\varphi$ 获得. 对给定的特征值 λ, $\triangle_s f + \lambda f = 0$ 的所有解的集合称为 $\triangle_s$ 的**特征空间**. 因此, 上述所有线性组合的集合是 $\triangle_s$ 相应于特征值 2 的特征空间, 且该特征空间是三维的. 还从第 8.3 节的定理 1 知道, 当限制在球面 $\rho = 1$ 上, 二次调和函数 $2xy$, $2yz$, $2zx$, $x^2 - y^2$ 和 $y^2 - z^2$ 都是 $\triangle_s$ 的特征函数. 用 φ 和 θ 表示, 这些调和函数分别是 (利用 (1)):

$$\begin{aligned}&2\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta, \quad 2\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta, \quad 2\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta, \\ &\sin^2\varphi(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \quad \text{和} \quad \sin^2\varphi\sin^2\theta - \cos^2\varphi.\end{aligned} \tag{2}$$

这些球面调和函数都可经旋转从一个变成另一个 (例如, 注意到 $2xy$ 由绕 z–轴旋转 $45°$ 的旋转变成 $x^2 - y^2$, 且经关于直线 $x = y = z$ 的旋转, 如上, x, y, z 循环依次变动). 因此, 它们有相同的特征值. 通过计算这些函数中的任一函数的 $\triangle_s$ 可得到该特征值. 然而, 有更容易的方法求得它. 注意到 $2xy = \rho^2 2\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta$, 它具有形式 $R(\rho)f(\varphi,\theta)$, 其中 $R(\rho) = \rho^2$, 这是第 8.3 节的 (13)$n = 2$ 和 $\lambda = 2(2+1) = 6$ 的特殊情形. 因此, 由次数为 2 的调和多项式 (没有低次项), (2) 的任意一个球面调和函数的特征值是 6. 我们还将证明五个函数 (2) (经线性组合) 生成 $\triangle_s$ 的特征值为 6 的整个五维特征空间. (注意到 $x^2 - z^2 = (x^2 - y^2) + (y^2 - z^2)$, 所以这不限制 $\triangle_s$ 的第六个无关的特征函数.) □

定义 一 n 次多项式 $u(x, y, z)$ 称为是**齐次的**, 如果它的所有项都是 n 次的(例如 $x^3 - 3xy^2 + xyz$). 此外, 函数 $u(x, y, z)$ 称为是**调和的**, 如果 $u(x, y, z)$ 满足 Laplace 方程 $\triangle u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ (例如,$x^3 - 3xy^2 + xyz$ 还是调和的).

用例 1 中用过的技巧, 可证明以下定理

定理1 每个 n 次齐次调和多项式 $u(x, y, z)$ 可写成形式 $U(\rho, \varphi, \theta) = \rho^n f(\varphi, \theta)$, 其中 $f(\varphi, \theta)$ 是 $\triangle_s$ 具特征值 $n(n+1)$ 的一个特征函数(即, 球面调和的).

以下更深入结果的证明将在有关 Laplace 级数的子节中给出.

定理 1′ 对任一 (C^2) 球面调和函数 $f(\varphi,\theta)$, 存在整数 $n \geqslant 0$, 使得 $\rho^n f(\varphi,\theta)$ 以 x, y 和 z 表示时是调和多项式. $f(\varphi,\theta)$ 的特征值是 $n(n+1)$, 且有 $2n+1$ 个线性无关具特征值 $n(n+1)$ 的球面调和函数 (即, 对应于该特征值的 $\triangle_s$ 的特征空间具有维数 $2n+1$).

对小数值的 n, 仅用反复试验法也许会容易求得 $2n+1$ 个独立齐次调和多项式. 仅由考虑 $(x+iy)^n$, $(y+iz)^n$ 和 $(z+ix)^n$ 的实部和虚部总可求得一些这种多项式 (为什么?). 然而, 我们需要发展一个求出所有这些多项式的系统方法. 实际上有许多不同的方法. 最常见的方法是: 用球坐标表示时, 寻求形如 $\rho^n L(\varphi)M(\theta)$ 的调和多项式. 把该形式代入第 8.3 节 $c=0$ 的 (9), 得

$$n(n+1) = \frac{-1}{L(\varphi)M(\theta)}\left(\frac{1}{\sin\varphi}[\sin\varphi L'(\varphi)]'M(\theta) + \frac{1}{\sin^2\varphi}L(\varphi)M''(\theta)\right). \qquad (3)$$

由分离变量得到结论: M''/M 是常数. 该常数必具有形式 $-m^2$, 对整数 $m = 0,\pm1,\pm2,\cdots$, 因不然的话 $M(\theta)$ 不可能是以 2π 为周期的周期函数 (为什么这是必须的?). 因此, $M(\theta)$ 具有形式 $c_1\cos(m\theta)+c_2\sin(m\theta)$, 但习惯上用复符号

$$M_m(\theta) = e^{im\theta}, \quad m = 0,\pm1,\pm2,\cdots. \qquad (4)$$

对每个 m, 对 $M(\theta) = M_m(\theta)$, 由 (3) 得到以下关于 $L(\varphi)$ 的常微:

$$\sin\varphi[\sin\varphi L'(\varphi)]' + [n(n+1)\sin^2\varphi - m^2]L(\varphi) = 0. \qquad (5)$$

当 $m=0$ 时, 它称为 **Legendre微分方程**, 对 $m \neq 0$ 称为**伴随的Legendre方程**. 解这种方程通常的方法是先作变换 $\omega = \cos\varphi$ 并定义 $h(\omega) = h(\cos\varphi) \equiv L(\varphi)$. 利用链法则 $\frac{d}{d\varphi} = \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d}{d\omega} = -\sin\varphi\frac{d}{d\omega}$, 以及 $\sin^2\varphi = 1-\omega^2$, 立刻得

$$(1-\omega^2)\frac{d}{d\omega}\left((1-\omega^2)\frac{dh}{d\omega}\right) + (n(n+1)(1-\omega^2) - m^2)h(\omega) = 0. \qquad (6)$$

当 $m=0$(Legendre 微分方程) 时, 该常微可由假设一个解是以幂级数 $\sum a_k\omega^k$ 的形式来解得. 我们将以更自然的方式 (参看例 3) 产生期望的无奇异性的解. 幂级数方法表明 $\omega=\cos\varphi$ 在 ±1 附近 (即, 当趋于球的北极和南极时) 有确切定义的仅有的解是一个关于 ω 的 n 次多项式的常数倍, 该多项式称为 n 次 **Legendre多项式** $P_n(\omega)$. 齐次二阶常微 (6) 的任一第二个线性无关的解在 $\omega=\pm1$ 有奇异性, 因通过检查 Wronski 行列式 (参看习题 8) 容易证明. 前 5 个 Legendre 多项式是

$$\begin{aligned}&P_0(\omega)=1,\ p_1(\omega)=\omega,\ P_2(\omega)=\frac{1}{2}(3\omega^2-1),\ P_3(\omega)=\frac{1}{2}(5\omega^3-3\omega),\\&P_4(\omega)=\frac{1}{8}(35\omega^4-30\omega^2+3),\ \ P_5(\omega)=\frac{1}{8}(63\omega^5-70\omega^3+15\omega).\end{aligned}\tag{7}$$

可能会需要高阶的 Legendre 多项式, 一般的公式是 (参看例 3)

$$P_n(\omega)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(2n-2k)!(-1)^k}{k!(n-k)!(n-2k)!}\omega^{n-2k},\tag{8}$$

其中如果 n 是偶数,$[\frac{n}{2}]=\frac{n}{2}$, 如果 n 是奇数, $[\frac{n}{2}]=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}$.

注记 作为选择, 有一个漂亮的对称公式

$$\begin{aligned}P_n(\omega)&=\sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{n!}{k!(n-k)!}\Big)^2\Big(\frac{\omega-1}{2}\Big)^{n-k}\Big(\frac{\omega+1}{2}\Big)^k\\&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\Big(\frac{n!}{k!(n-k)!}\sin^{n-k}\frac{\varphi}{2}\cos^k\frac{\varphi}{2}\Big)^2.\end{aligned}$$ □

例 2 求一 x,y 和 z 的三次调和多项式, 使得它在球面 $\rho=1$ 上的限制是与 θ 无关的球面调和函数 $f(\varphi,\theta)$.

解 先求适当的球面调和函数, 然后构造该多项式. 乘积球调和函数具有形式 $L(\varphi)e^{im\theta}$, 其中 $L(\varphi)$ 是伴随的 Legendre 方程 (5) 的解. 由于期望与 θ 无关的球面调和函数, 我们取 $m=0$ 并得出 $L(\varphi)=P_n(\cos\varphi)$. 在球面上, $z=\cos\varphi$. 因此, 由于希望得到次数为 3 的多项式, 取 $n=3$, 则合适的调和多项式是

$$2\rho^3P_3(\cos\varphi)=\rho^3(5\cos^3\varphi-3\cos\varphi)=5z^3-3z\rho^2=5z^3-3z(x^2+y^2+z^2).$$ □

例 3 考虑熟悉的调和位势 $u(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}=\rho^{-1}$, 并令 $u_c(x,y,z)\equiv u(x,y,z-c)$ 是它沿着 z-轴的平移. 用球坐标 u_c 由 $U_c(\rho,\varphi,\theta)=(\rho^2-2c\rho\cos\varphi+c^2)^{-\frac{1}{2}}$ 给出. 通过把 U_c 展成变量 c 的幂级数, 证明

$$U_c(\rho,\varphi,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\varphi)\rho^{-(n+1)}c^n, \tag{9}$$

其中 $P_n(\cos\varphi)$ 由 (8) 给出. 证明 $P_n(\cos\varphi)$ 确实满足 Legendre 微分方程 (即 $m=0$ 的方程 (5)).

解 注意到 $x^2+y^2+(z-c)^2=\rho^2-2cz+c^2=\rho^2-2c\rho\cos\varphi+c^2=\rho^2(1-2\cos\varphi(c/\rho)+(c/\rho)^2)$. 因此, 令 $\xi=c/\rho$ 和 $\omega=\cos\varphi$, 得

$$U_c(\rho,\varphi,\theta)=\rho^{-1}[1-2\xi\cos\varphi+\xi^2]^{-\frac{1}{2}}=\rho^{-1}[1-2\xi(\omega-\frac{1}{2}\xi)]^{-\frac{1}{2}}.$$

利用二项式展开 $[1-2b]^{-\frac{1}{2}}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2r)!}{2^r(r!)^2}b^r$(对 $|b|<\frac{1}{2}$ 是收敛的), 取 $b=\xi(\omega-\frac{1}{2}\xi)$, 则得 (对 $|\xi(\omega-\xi/2)|<\frac{1}{2}$, 比如 $|\xi|<\frac{1}{3}$ 或 $|c|<\rho/3$), 对 $|c|<\frac{\rho}{3}$, 有

$$\begin{aligned}U_c(\rho,\varphi,\theta)&=\frac{1}{\rho}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2r)!}{2^r(r!)^2}\left[\xi(\omega-\frac{1}{2}\xi)\right]^r\\&=\frac{1}{\rho}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2r)!}{2^r(r!)^2}\left(\xi^r\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\frac{r!}{s!(r-s)!}\omega^{r-s}(\frac{1}{2}\xi)^s\right)\\&=\frac{1}{\rho}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(2r)!(-1)^s}{2^{r+s}(r!)^2}\frac{r!}{s!(r-s)!}\omega^{r-s}\xi^{r+s}\\&=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^s(2r)!}{2^{r+s}r!(r-s)!s!}\omega^{r-s}\rho^{-(1+r+s)}c^{r+s}.\end{aligned}$$

因要以 c^n 为项的级数, 则作指标变换 $n=r+s$, $k=s$. 由于 $k=s\leqslant r=n-s=n-k$, 故有 $2k\leqslant n$, 其中 k 取值于 0 和 $[\frac{n}{2}]$ 之间. 因此, 有

$$U_c(\rho,\varphi,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}(\cos\varphi)^{n-2k}\right]\rho^{-(n+1)}c^n,\quad |c|<\frac{\rho}{3},$$

此为期望的关系式 (9). 为证明 $P_n(\cos\varphi)$ 是 Legendre 微分方程的解, 只需证明

$P_n(\cos\varphi)\rho^{-(n+1)}$ 是调和的. 然而, 由于 (9) 是函数 $f(c)=U_c(\rho,\varphi,\theta)$ 的 Taylor 级数, 故必有

$$\begin{aligned} &n!P_n(\cos\varphi)\rho^{-(n+1)}=f^{(n)}(0)\\ &=\frac{d^n}{dc^n}(x^2+y^2+(z-c)^2)^{-\frac{1}{2}}|_{c=0}=(-1)^n\frac{\partial^n}{\partial z^n}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{10}$$

此为一调和函数的偏导数, 于是本身是调和的 (为什么?). □

我们知道, 如果 $L(\varphi)$ 是 m 阶伴随的 Legendre 方程 (5) 的解, 则 $e^{im\theta}L(\varphi)$ 是球面调和函数. 至此, 我们已构造了当 $m=0$ 时的球面调和函数, 即 $P_n(\cos\varphi)$. 这些球面调和函数只依赖于 φ(不依赖于 θ), 它们称为**带状球面调和函数**. 对一任意整数 m, (5) 的适当的解 $P_{n,m}(\omega)$ 称为**伴随的 Legendre 函数**, 且由以下给出

$$P_{n,m}(\omega)=(1-\omega^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{d\omega^m}P_n(\omega)$$

或

$$P_{n,m}(\cos\varphi)=\sin^m\varphi P_n^{(m)}(\cos\varphi),\quad m\geqslant 0,$$

和 (11)

$$P_{n,m}(\omega)=P_{n,-m}(\omega),\quad m<0.$$

注意到如果 $|m|>n$, $P_{n,m}(\omega)=0$, 因 $P_n(\omega)$ 是一 n 次多项式. 验证 $P_{n,m}(\omega)$ 满足方程 (6) 的一种方法是对 $|m|$ 用归纳法, 利用事实: 当 $m=0$ 时 $P_n(\omega)$ 满足该方程. 这没有解释 (11) 最先是如何求得的. 在最后的子节中提供了一个推导 (参看定理 6).

定理 2 对任一整数 $n\geqslant 0$, 下面的 $2n+1$ 个函数是 $\triangle_s$ 的具公共特征值 $n(n+1)$ 的特征函数 (即, 球面调和函数):

$$S_{n,m}(\varphi,\theta)\equiv e^{im\theta}P_{n,m}(\cos\varphi)=e^{im\theta}\sin^{|m|}\varphi P_n^{(|m|)}(\cos\varphi),\quad m=-n,\cdots,n. \tag{12}$$

通过取实部和虚部, 我们有实值球面调和函数:

$$P_n(\cos\varphi),\ \cos(m\theta)\sin^m\varphi P_n^{(m)}(\cos\varphi),\ \sin^m\varphi P_n^{(m)}(\cos\varphi),\ m=1,\cdots,n. \tag{12'}$$

(12′) 中的每个函数与 ρ^n 相乘后, 当以 x, y 和 z 表示时成为 n 次调和多项式.

在给出证明之前, 在图 1 我们向读者提供了一些球面调和函数的绘画表示. 第一张图是单位球面. 在图 1 中的其他图中, 为了表示一给定的球面调和函数, 比如 $S(\varphi,\theta)$, 我们已将单位球面上的每点 (φ,θ) 推离原点 $\alpha\cdot S(\varphi,\theta)$ 的距离, 其中 α 是正常数 (通常是 0.5 或更小, 使得球面的形变不太严重). 如果 $S(\varphi,\theta)<0$, 则点 (φ,θ) 推向原点. 注意到带状球面调和函数 $P_n(\cos\varphi)$ 由绕 z–轴旋转的曲面表示, 而其他的球面调和则不是, 由于因子 $\sin(m\theta)$, 虽然这些其他的曲面仍然具有一张不连续的关于 z–轴旋转对称的褶曲面. $P_3(\cos\varphi)$ 和 $P_5(\cos\varphi)$ 给了两张视图, 因为这些曲面在 xy–平面上反射不是不变的. 注意到如果 $m+n$ 是偶数, 则 $P_{n,m}(\cos\varphi)\sin(m\theta)$ 的曲面在 xy–平面上反射是不变的, 因为在那种情形 $P_{n,m}(\cos\varphi)$ 关于 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 是偶函数 (为什么?). 当 m 是偶数时, 有过 z–轴的对称性. 如果 n 是偶数 m 是奇数, 则曲面关于原点对称 (为什么?). 这些事实可使我们"看到" 曲面没有显示的部分.

定理 2 的证明 (12) 中的每个函数是函数 $M_m(\theta)$(参看 (4)) 和 (5) 的一个解的乘积, 因此是 $\triangle_s f=-n(n+1)f$ 的一个解 (参看(3)). 易得该线性齐次方程解的实部和虚部也是解. 由于 ρ^n 满足第 8.3 节 $\lambda=n(n+1)$ 和 $c=0$ 的 (10), 故由第 8.3 节的定理 1 得知, 当 (12′) 中的任一函数以 ρ^n 相乘时, 则得到空间上的调和函数. 剩下来证明这些调和函数当以 x, y 和 z 表示时是 n 次多项式. 令 $r=\sqrt{x^2+y^2}=\rho\sin\varphi$. 注意到 $\cos(m\theta)\rho^m\sin^m\varphi=r^m\cos(m\theta)=\mathrm{Re}[(x+iy)^m]$, 以及 $\sin(m\theta)\rho^m\sin^m\varphi=\cdots=\mathrm{Im}[(x+iy)^m]$, 它们是多项式. 此外, $\rho^{n-m}P_n^{(m)}(\cos\varphi)$ 具有形如 Az^{n-m} 的主项 (因 $z=\rho\cos\varphi$), 而次项具有形式 $Bz^{n-m-2}\rho^2$, 等等. 认识到在 $P_n^{(m)}(\omega)$ 中 ω 的幂次都是偶数或都是奇数 (为什么?) 是重要的, 于是只有 ρ 的偶次幂出现. 因 $\rho^2=x^2+y^2+z^2$, 所以这些 ρ 的偶次幂都是多项式 (不同于 ρ 本身), 因此 $\rho^{n-m}P_n^{(m)}(\cos\varphi)$ 实际上是个多项式. 于是由 (12′) 的函数以 ρ^n 相乘得到的每个调和函数确实是一个多项式. □

注记 习题 12 说明, 每个实的调和 n 次多项式是由球面调和函数 (12′) 乘

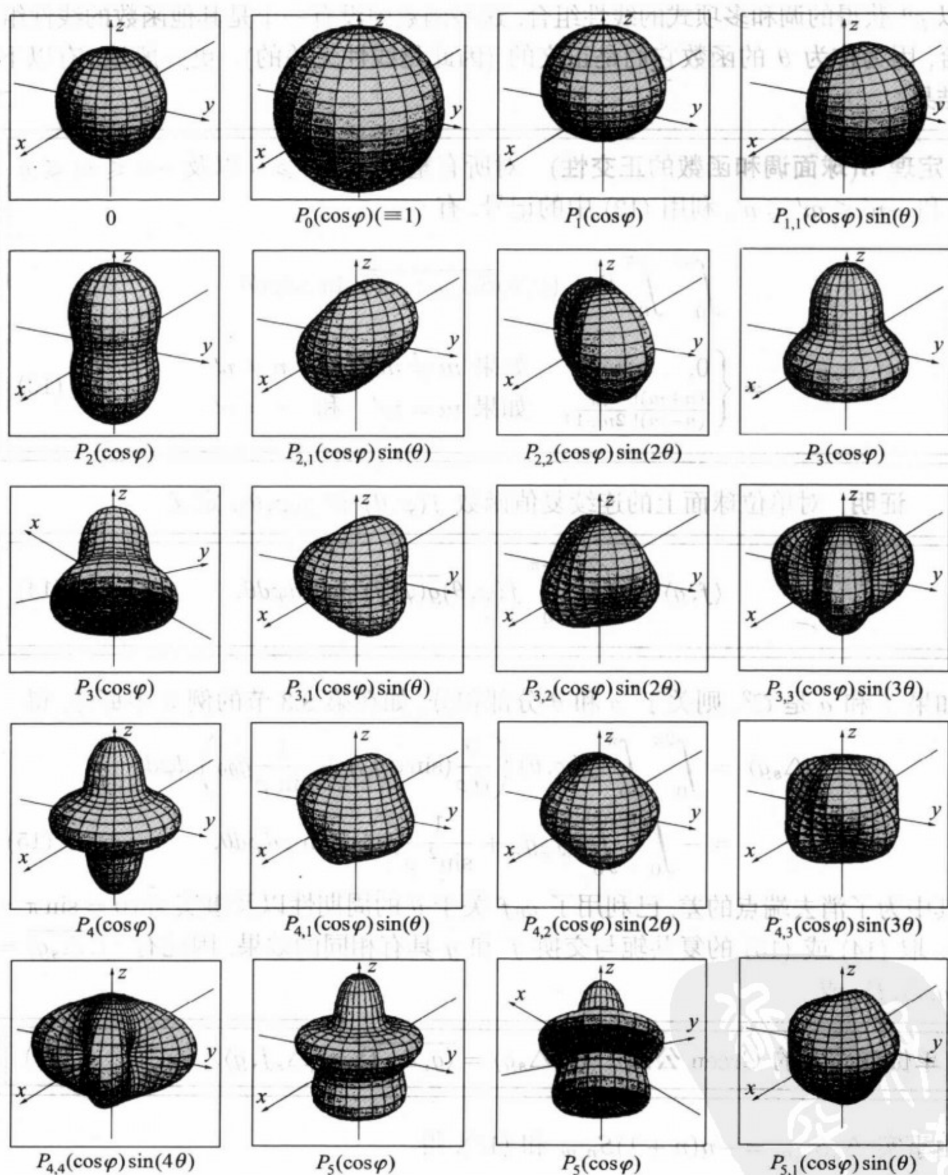

0
$P_0(\cos\varphi)(\equiv 1)$
$P_1(\cos\varphi)$
$P_{1,1}(\cos\varphi)\sin(\theta)$
$P_2(\cos\varphi)$
$P_{2,1}(\cos\varphi)\sin(\theta)$
$P_{2,2}(\cos\varphi)\sin(2\theta)$
$P_3(\cos\varphi)$
$P_3(\cos\varphi)$
$P_{3,1}(\cos\varphi)\sin(\theta)$
$P_{3,2}(\cos\varphi)\sin(2\theta)$
$P_{3,3}(\cos\varphi)\sin(3\theta)$
$P_4(\cos\varphi)$
$P_{4,1}(\cos\varphi)\sin(\theta)$
$P_{4,2}(\cos\varphi)\sin(2\theta)$
$P_{4,3}(\cos\varphi)\sin(3\theta)$
$P_{4,4}(\cos\varphi)\sin(4\theta)$
$P_5(\cos\varphi)$
$P_5(\cos\varphi)$
$P_{5,1}(\cos\varphi)\sin(\theta)$

图 1

以 ρ^n 获得的调和多项式的线性组合. 这些函数中没有一个是其他函数的线性组合, 因为作为 θ 的函数它们是正交的 (因此是线性无关的). 更一般地, 有以下结果. □

定理 3(球面调和函数的正交性) 对所有整数 $n,\ n' \geqslant 0$ 以及 $-n \leqslant m \leqslant n$ 和 $-n' \leqslant m' \leqslant n'$, 利用 (12) 中的记号, 有

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} S_{n,m}(\varphi,\theta)\overline{S_{n',m'}(\varphi,\theta)}\sin\varphi d\varphi d\theta$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{如果 } m \neq m' \text{ 或 } n \neq n' \\ \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{4\pi}{2n+1}, & \text{如果 } m = m' \text{ 和 } n = n'. \end{cases} \tag{13}$$

证明 对单位球面上的连续复值函数 $f(\varphi,\theta)$ 和 $g(\varphi,\theta)$, 定义

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\varphi,\theta)\overline{g(\varphi,\theta)}\sin\varphi d\varphi d\theta. \tag{14}$$

如果 f 和 g 是 C^2, 则关于 φ 和 θ 分部积分, 如在第 8.3 节的例 3 中那样, 得

$$\begin{aligned}\langle f, \triangle_s g\rangle &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\varphi,\theta)\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\varphi\bar{g}_\varphi) + \frac{1}{\sin\varphi}\bar{g}_{\theta\theta}\right)d\varphi d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(f_\varphi\bar{g}_\varphi + \frac{1}{\sin^2\varphi}f_\theta\bar{g}_\theta)\sin\varphi d\varphi d\theta,\end{aligned} \tag{15}$$

其中为了消去端点的差, 已利用了 $g_\theta f$ 关于 θ 的周期性以及事实 $\sin 0 = \sin\pi = 0$. 取 (14) 或 (15) 的复共轭与交换 f 和 g 具有相同的效果. 因此有 $\overline{\langle f, \triangle_s g\rangle} = \langle g, \triangle_s f\rangle$, 或

单位球面上的 Green 公式: $\langle f, \triangle_s g\rangle = \overline{\langle g, \triangle_s f\rangle} = \langle \triangle_s f, g\rangle$. (16)

由事实 $\triangle_s S_{n,m} = -n(n+1)S_{n,m}$ 和 (16), 得

$$-[n(n+1) - n'(n'+1)]\langle S_{n,m}, S_{n',m'}\rangle = \langle \triangle_s S_{n,m}, S_{n',m'}\rangle - \langle S_{n,m}, \triangle_s S_{n',m'}\rangle = 0.$$

因此, 如果 $n \neq n'$, 则 $\langle S_{n,m}, S_{n',m'}\rangle = 0$ (即, 如果 $n \neq n'$, (13) 成立). 如果 $n = n'$ 和 $m \neq m'$, 则只要利用 $e^{im\theta}$ 和 $e^{im'\theta}$ 在 θ 的区间 $[0, 2\pi]$ 上的正交性. 在习题 10 中, 我们协助读者证明当 $n = n'$ 和 $m = m'$ 时的结果 (13). □

球面上函数的 Laplace 级数

定义 定义在球面上函数 $f(\varphi,\theta)$ 的 Laplace 级数是

$$\text{LS } f(\varphi,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}c_{n,m}S_{n,m}(\varphi,\theta), \tag{17}$$

其中

$$\begin{aligned}c_{n,m}&=\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\varphi,\theta)e^{-im\theta}P_{n,m}(\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi d\theta,\\&=\|S_{n,m}\|^{-2}\langle f,S_{n,m}\rangle,\end{aligned} \tag{18}$$

$P_{n,m}$ 和 $S_{n,m}$ 分别由 (11) 和 (12′) 定义, 如果积分 (18) 存在的话.

注记 就像圆周上的 Fourier 级数或矩形上的二重 Fourier 级数, 球面上函数的 Laplace 级数是一个特征函数展开, 其中算子是函数的给定区域上的 Laplace 算子. 系数公式形式地由正交关系 (13) 获得. □

定理 4(Laplace 级数的一致收敛性) 设 $f(\varphi,\theta)$ 是单位球面上的 C^2 函数. 则 f 的 Laplace 级数在以下意义下一致收敛到 f

$$\left|f(\varphi,\theta)-\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n}c_{n,m}S_{n,m}(\varphi,\theta)\right|\leqslant\frac{M\sqrt{2}}{\sqrt{2N+1}}, \tag{19}$$

其中 M 是连续函数 $|\triangle_s f(\varphi,\theta)|$ 在单位球面上的最大值.

证明 令 σ_N 表示 (19) 中的和, 令 p 是球面上任意一点. 可以证明 (参看习题 13) 尽管 $\sigma_N(p)$ 的值看上去可能依赖于北极的选取 (即球坐标的选取), 实际上不是这样. 因此, 为证明 $\sigma_0(p)$, $\sigma_1(p)$, $\sigma_2(p)$, $\cdots$ 的收敛性, 可选 p 在北极的球坐标. 假设已作了这个选择, 我们只需证明 (19) 在极点 $\varphi=0$ 是有效的. 在点

p, 则有

$$\begin{aligned}\sigma_N(p) &= \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n} c_{n,m}P_{n,m}(1)e^{im\theta} = \sum_{n=0}^{N} c_{n,0}\\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sum_{n=0}^{N}(2n+1)P_n(\cos\varphi)f(\varphi,\theta)\sin\varphi d\varphi d\theta\\ &= \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}[P_0(\omega)+3P_1(\omega)+\cdots+(2N+1)P_N(\omega)]F(\omega)d\omega,\end{aligned}$$

其中 $F(\omega)=F(\cos\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi,\theta)d\theta$ 是 f 在纬度 $\varphi=\cos^{-1}\omega$ 上的平均. 在习题 9 中我们证明

$$P_0(\omega)+3P_1(\omega)+\cdots+(2N+1)P_N(\omega)=P_N'(\omega)+P_{N+1}'(\omega).$$

因此,

$$\begin{aligned}\sigma_N(p) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[P_N'(\omega)+P_{N+1}'(\omega)]F(\omega)d\omega\\ &= \frac{1}{2}[P_N(\omega)+P_{N+1}(\omega)]F(\omega)\Big|_{-1}^{1}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}F'(\omega)[P_N(\omega)+P_{N+1}(\omega)]d\omega\\ &= F(1)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}F'(\omega)[P_N(\omega)+P_{N+1}(\omega)]d\omega, \qquad (20)\end{aligned}$$

其中用了事实 $P_n(1)=1$ 和 $P_n(-1)=(-1)^n$(参看习题 9). 因 $F(1)=f(p)$, 故有(根据 (20) 和 Cauchy-Schwarz 不等式 $|\langle f,g\rangle|\leqslant\|f\|\|g\|$),

$$\begin{aligned}|f(p)-\sigma_N(p)| &= \frac{1}{2}|<F',P_N+P_{N+1}>|\leqslant\frac{1}{2}\|F'\|\sqrt{\langle P_N+P_{N+1},P_N+P_{N+1}\rangle}\\ &= \frac{1}{2}\|F'\|\sqrt{\frac{2}{2N+1}+\frac{2}{2N+3}}\leqslant\frac{\|F'\|}{\sqrt{2N+1}}, \qquad (21)\end{aligned}$$

其中 $\|F'\|^2=\int_{-1}^{1}F'(\omega)^2d\omega$ 以及由习题 10, $\|P_N\|^2=2/(2N+1)$. 接下来以 $M=\max|\triangle_s f(\varphi,\theta)|$ 来估计 $\|F'\|$. 因 $\frac{d\omega}{d\varphi}=-\sin\varphi$, 故由 Leibniz 法则得

$$\begin{aligned}-2\pi\sin^2\varphi F'(\varphi) &= \sin\varphi\frac{d}{d\varphi}\int_0^{2\pi}f(\varphi,\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\varphi}(\sin\varphi f_\varphi(\varphi,\theta))_\varphi d\varphi d\theta\\ &= \int_0^{\varphi}\int_0^{2\pi}(\frac{1}{\sin\varphi}(\sin\varphi f_\varphi)_\varphi+\frac{1}{\sin^2\varphi}f_{\theta\theta})\sin\varphi d\theta d\varphi,\end{aligned}$$

其中, 根据 f_θ 的周期性, 我们用了 $\int_0^{2\pi} f_{\theta\theta}d\theta = 0$. 因此,

$$\sin^2\varphi|F'(\omega)| \leqslant M\int_0^\varphi \sin\varphi d\varphi = M(1-\cos\varphi).$$

对 $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, 有 $\sin^2\varphi = (1-\cos^2\varphi) \geqslant 1-\cos\varphi$. 于是, $|F'(\omega)| \leqslant M$, $0 \leqslant \omega \leqslant 1$. 类似地, 上面以 $-\int_\varphi^\pi$ 替换 $\int_0^\varphi$, 得 $|F'(\omega)| \leqslant M$, $-1 \leqslant \omega \leqslant 0$. 从而有 $\int_{-1}^1 F'(\omega)^2 d\omega \leqslant 2M^2$, $\|F'\| \leqslant \sqrt{2}M$, 因此由 (21) 得 (19). □

定理 1′ 的证明 假设存在 $\triangle_s$ 具特征值 λ 的实值 C^2 特征函数 f. 如果该特征值不具形式 $n(n+1)$, 则

$$-(\lambda - n(n+1))\cdot\langle f, S_{n,m}\rangle = \langle \triangle_s f, S_{n,m}\rangle - \langle f, \triangle_s S_{n,m}\rangle = 0,$$

所以得 $\langle f, S_{n,m}\rangle = 0$. 因此, LS $f(\varphi,\theta) \equiv 0$, 且由于 f 是 C^2, 由定理 4, 则有 $f(\varphi,\theta) = \text{LS } f(\varphi,\theta) \equiv 0$. 如果 λ 具形式 $n(n+1)$, 则 f 属于特征值为 $n(n+1)$ 的特征空间, 仍然有 $f(\varphi,\theta) = \text{LS } f(\varphi,\theta)$, 此为 $S_{n,m}$, $m=-n,\cdots,n$ 的线性组合. 由于 f 是实值的, 故该线性组合的虚部必相互抵消, 表明 f 是以下实特征函数的线性组合:

$$P_n(\cos\varphi),\quad \cos(m\theta)P_{n,m}(\cos\varphi),\quad \sin(m\theta)P_{n,m}(\cos\varphi),\quad m=1,\cdots,n. \tag{22}$$

于是, $\triangle_s$ 的任一 C^2 特征函数必具有形如 $n(n+1)$ 的特征值, 且关于 $n(n+1)$ 的特征空间中的函数必是 (22) 中的函数的线性组合 (即, 该特征空间的维数是 $2n+1$). 从定理 2 已知 (22) 诸函数是 n 次调和多项式 (在单位球面上的) 限制. □

例子和应用

例 4 (球内的稳态温度) 求解以下球内 Dirichlet 问题:

$$\begin{aligned} &\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0,\quad \rho<2;\\ &\text{B.C.}\quad u(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2,\quad \rho=2. \end{aligned} \tag{23}$$

解 先用 $\rho = 2$ 的球坐标写出 $x^2+2y^2+3z^2$:

$$x^2+2y^2+3z^2 = 4\sin^2\varphi\cos^2\theta + 8\sin^2\varphi\sin^2\theta + 12\cos^2\varphi \equiv f(\varphi,\theta). \tag{24}$$

我们将把 $f(\varphi,\theta)$ 表示成球面调和函数的线性组合. 其次, 我们只需在具特征值 $n(n+1)$ 的每项前面插入因子 $(\rho/2)^n$, 然后这个结果将解答原问题 (为什么?). 通

过计算关于 Laplace 系数的积分 (18) 可计算 $f(\varphi,\theta)$ 的 Laplace 级数. 由于 (在 (24) 中) 关于 $\sin\varphi$ 和 $\cos\varphi$ 的多项式因子的最高次数是 2, 故知 $c_{n,m}=0,\ n\geqslant 3$, 但仍还留有 9 个积分要计算. 然而, 利用半角公式 (例如, $\sin^2\theta=\frac{1}{2}[1-\cos(2\theta)]$) 我们来试图把 $f(\varphi,\theta)$ 写成 Laplace 级数的形式. 首先把 $f(\varphi,\theta)$ 写成关于 θ 的 Fourier 级数, 系数是 φ 的函数:

$$f(\varphi,\theta)=(6\sin^2\varphi+12\cos^2\varphi)-2\sin^2\varphi\cos(2\theta)=(6\cos^2\varphi+6)-2\sin^2\varphi\cos(2\theta),$$

其中我们已把第一项写成 $\omega=\cos\varphi$ 的多项式, 因要把该项表示为 Legendre 多项式的和. 由于 $P_2(\omega)=\frac{1}{2}(3\omega^2-1)$ 和 $P_0(\omega)=1$, 故有 $6\omega^2+6=(4P_2(\omega)+2)+6=4P_2(\omega)+8P_0(\omega)$. 还要把因子 $-2\sin^2\varphi$ 表示为伴随的 Legendre 函数的线性组合 $\sum a_nP_{n,2}(\omega)=\sin^2\varphi\sum a_nP_n''(\cos\omega)$. 因此, 需要 $\sum a_nP_n''(\omega)=-2$, 且显然除了 $n=2$ 之外 $a_n=0$, 这时有 $a_2P_2''(\omega)=a_2\cdot 3=-2$ 隐含 $a_2=-\frac{2}{3}$. 于是有以下 $f(\varphi,\theta)$ 的 Laplace 级数:

$$\begin{aligned}f(\varphi,\theta)&=8P_0(\cos\varphi)+\left[4P_2(\cos\varphi)-\frac{2}{3}P_{2,2}(\cos\varphi)\cos(2\theta)\right]\\&=8+[(6\cos^2\varphi-2)-2\sin^2\varphi\cos(2\theta)].\end{aligned}$$

由于在方括号中的项是 $n=2$ 的球面调和函数, 故以 $(\rho/2)^2$ 乘该项, 得到解

$$U(\rho,\varphi,\theta)=8+[(6\cos^2\varphi-2)-2\sin^2\varphi\cos(2\theta)](\frac{\rho}{2})^2,$$

或

$$u(x,y,z)=8+\frac{3}{2}z^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)-\frac{1}{2}(x^2-y^2)=8-x^2+z^2. \tag{25}$$

作为验证, 注意到 $u(x,y,z)=8-x^2+z^2$ 显然是调和的, 且当 $x^2+y^2+z^2=4$ 时, 有 $u(x,y,z)=2(x^2+y^2+z^2)-x^2+z^2=x^2+2y^2+3z^2$, 所以 (25) 是问题的解. 实际上, 有空间中有界区域上调和函数的最大值最小值原理 (与第 6.4 节中二维形式的证明完全类似). 作为一个推论, 有界区域上 Dirichlet 问题的解是唯一的 (例如, (25) 是 (23) 的唯一解). □

注记　在例 4 中用的方法可用来求解任一球内的 Dirichlet 问题, 其中在边界球面上的函数是 n 次多项式, 记作 $p(x,y,z)$. 的确, 该解将是次数 $\leqslant n$ 的调和多项式 $h(x,y,z)$. 在球面上所有的点 (x,y,z) 有 $p(x,y,z)=h(x,y,z)$, 但在其他点通常不相等. □

例 5 (振动的气球) 令 $v(\varphi,\theta,t)$ 表示一平衡半径为 ρ_0 的振动的球形气球在点 (ρ_0,φ,θ) 处径向 (正的 ρ) 位移. 假设是均匀的, 可证明关于 (无阻尼的)v 的唯一的二阶方程具有形式 $v_{tt}=a^2\triangle_s v-\omega^2 v$, 其中 a 和 ω 为某常数. 求以下的形式解

$$\begin{array}{ll}\text{D.E.} & v_{tt}=a^2\triangle_s v-\omega^2 v,\quad 0\leqslant\varphi,\ \frac{\theta}{2}\leqslant\pi,\quad -\infty<t<\infty;\\ \text{I.C.} & v(\varphi,\theta)=f(\varphi,\theta),\quad v_t(\varphi,\theta)=g(\varphi,\theta).\end{array}\tag{26}$$

解 由分离变量 $v=T(t)F(\varphi,\theta)$, 得

$$\frac{1}{a^2}(\frac{T''}{T}+\omega^2)=\frac{\triangle_s F}{F}=-\lambda.$$

因此, $F(\varphi,\theta)$ 必是具特征值 λ 的某个球面调和函数, 特征值必定具形式 $\lambda_n=n(n+1)$, 以及 $T(t)=c_1\cos(\sqrt{\omega^2+a^2\lambda_n}t)+c_2\sin(\sqrt{\omega^2+a^2\lambda_n}t)$. 于是, 形式上有

$$v(\varphi,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(a_{n,m}\cos(\sqrt{\omega^2+a^2\lambda_n}t)+b_{n,m}\sin(\sqrt{\omega^2+a^2\lambda_n}t))S_{n,m}(\varphi,\theta),$$

其中

$$a_{n,m}=\|S_{n,m}\|^{-2}\langle f,S_{n,m}\rangle\quad 和\quad b_{n,m}=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+a^2\lambda_n}}\|S_{n,m}\|^{-2}\langle g,S_{n,m}\rangle,$$

以及

$$\lambda_n=n(n+1),\quad S_{n,m}(\varphi,\theta)=e^{im\theta}P_{n,m}(\cos\varphi),\quad \|S_{n,m}\|^{-2}=\frac{(n-m)!(2n+1)}{(n+m)!4\pi}.$$

如果初始位移和初始速度分布 f 和 g 是 C^2 的, 则 (根据定理 4) 在任一确定的实验误差之内可用它们的 Laplace 级数的部分和来逼近, 由此得到 D.E. 的 C^∞ 解, 该解在实验误差之内满足 I.C.. 我们把解的唯一性以及解对初始数据的连续依赖性的证明留给有兴趣的读者. □

例 6 (球上的热问题) 描述 Laplace 算子的所有特征函数, 它们在球 $\rho<\rho_0$ 的内部是 C^2 的, 且在边界球面 $\rho=\rho_0$ 上为零. 利用这些特征函数来形式求解

以下热问题

$$
\begin{array}{ll}
\text{D.E.} & u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \quad x^2 + y^2 + z^2 \leqslant \rho_0^2, \quad t \geqslant 0; \\
\text{B.C.} & U(\rho_0, \varphi, \theta, t) = 0, \quad 0 \leqslant \varphi, \ \frac{\theta}{2} \leqslant \pi; \\
\text{I.C.} & U(\rho, \varphi, \theta, 0) = f(\rho, \varphi, \theta), \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0.
\end{array} \tag{27}
$$

解 由第 8.3 节的定理 1 得知, 如果 $R(\rho)f(\varphi,\theta)$ 是 $\triangle$ 的特征函数, 则 $f(\varphi,\theta)$ 是具特征值 $n(n+1)$ 的球面调和函数, 且 $R(\rho)$ 满足**径向方程**

$$
(\rho^2 R'(\rho))' + (c\rho^2 - n(n+1))R(\rho) = 0. \tag{28}
$$

对 $c = 0$, 函数 $R(\rho)$ 必是 ρ^n 的倍数, 因另一个线性无关的解在 $\rho = 0$ 处有奇异性. 然而, ρ^n 在 $\rho = \rho_0$ 处不为零, 因此必须取 $c \neq 0$. 当 $c = -b^2$ 时, 有 (参看下一子节中的定理 5) 通解 $R_n^-(b\rho)$, 其中 $R_n^-(\rho) = \rho^n(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho})^n[R_0^-(\rho)]$, $R_0^-(\rho) = (ae^\rho + be^{-\rho})/\rho$ (参看第 8.3 节的 (14)). $R_n^-(b\rho)$ 在原点无奇异性的唯一形式是 $A\cdot\sinh(b\rho)/\rho$, 但它当 $\rho = \rho_0$ 时不等于 0, 除非 $A = 0$. 当 $c = b^2$ 时, 有 (参看定理 5) 通解 $R_n^+(b\rho)$, 其中 $R_n^+(\rho) = \rho^n(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho})^n[R_0^+(\rho)]$, $R_0^+(\rho) = A\cdot\sin(\rho+\delta)/\rho$. 因此如果 $R_0^+(\rho)$ 在 $\rho = 0$ (即 $\delta = 0$) 处无奇异性, 则 $R_0^+(\rho)$ 是以下的常数倍

$$
j_0(\rho) \equiv \frac{\sin\rho}{\rho} = 1 - \frac{\rho^2}{3!} + \frac{\rho^4}{5!} - \cdots, \tag{29}
$$

此为收敛半径为无穷的幂级数. 当算子 $\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}$ 逐项用到形如 $c_0 + c_2\rho^2 + c_4\rho^4 + \cdots$ 的级数时 (只涉及到 ρ 的偶数幂, 就像 (29) 中的级数), 第一项消失, 其他项中的指数减少 2, 得到另一个这种形式的级数. 对级数 (29) 反复应用该事实, 得 (28) 具 $c = +b^2$ 的某些非奇异的解是以下的常数倍

$$
j_n(b\rho), \quad 其中 \quad j_n(\rho) \equiv (-1)^n\rho^n\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^n[j_0(\rho)], \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{30}
$$

而且 ρ^n 的因子确保 $j_n(\rho)$ 前 $n-1$ 的导数在 $\rho=0$ 处为零. 如果算子 $\rho^n(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho})^n$ 作用于形如 $c_{-1}\rho^{-1}+c_0\rho^0+c_1\rho^1+\cdots$ 的级数上, $c_{-1}\neq 0$ (如级数 $\cos\rho/\rho$ 或 $e^{\pm\rho}/\rho$), 则结果总是有奇异性 (为什么?). 因此, $j_n(\rho)$ 的常数倍是 (28) 唯一的无奇异性的解. 由于 B.C., 需对 b 选取, 记作 $b_{n,q}(q=1,2,3,\cdots)$, 使得 $j_n(b_{n,q}\rho_0)=0$. 令 $\beta_{n,q}$ 表示满足 $j_n(\beta_{n,q})=0$ 的第 q 个正实数 (即 $j_n(\beta)$ 的图像穿过正 β-轴的第 q 个位置, 或 j_n 的第 q 个正零点). 则

$$b_{n,q}=\frac{\beta_{n,q}}{\rho_0},\quad 因\quad j_n(b_{n,q}\rho_0)=j_n(\beta_{n,q})=0,\quad q=1,2,3,\cdots. \tag{31}$$

对 $n=0$, 有 $\beta_{0,q}=q\pi$. 当 $n\geqslant 1$ 时, 存在无穷多的 $b_{n,q}$(参看下面的 (32) 和第 4.4 节的例 8). 然而, 对 $n\geqslant 1$, 要确定 $\beta_{n,q}$ 更困难. 例如,

$$j_1(\rho)=-\frac{d}{d\rho}(\frac{\sin\rho}{\rho})=\frac{1}{\rho^2}(\sin\rho-\rho\cos\rho),$$

$\beta_{1,q}$ 是方程 $\rho=\tan\rho$ 的正解, 它可在任意精度下得到数值解, 比如用 Newton-Raphson 方法. 然而, 对 n 以及不太大的 q, 有数表提供了 $b_{n,q}$ 的一些值, 并对任意的 n 和大的 q 有获得 $b_{n,q}$ 近似值的公式. 函数 $j_n(\rho)$ 称为**球 Bessel 函数**, 且它们与**Bessel 函数** $J_\nu(\rho)$ 通过以下相联系

$$j_n(\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}J_{n+\frac{1}{2}}(\rho). \tag{32}$$

在图 2 中, 我们有对 $n=0,1$ 和 2 的 $j_n(\rho)$ 的图像.

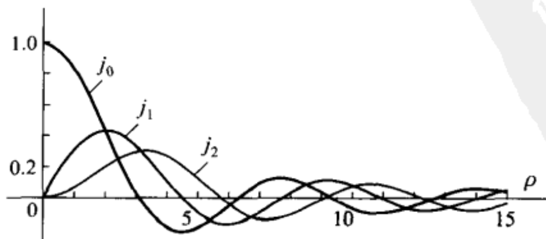


图 2

△ 在球面 $\rho=\rho_0$ 上等于零的特征函数是下列函数族成员的常数倍 (其中 $n=0,1,2,\cdots$ 和 $m=-n,-n+1,\cdots,n$):

$$E_{n,q,m}(\rho,\varphi,\theta)\equiv j_n(b_{n,q}\rho)S_{n,m}(\varphi,\theta)=j_n(b_{n,q}\rho)e^{im\theta}\sin^{|m|}\varphi P_n^{(|m|)}(\cos\varphi). \quad (33)$$

因 $E_{n,q,m}$ 的特征值是 $b_{n,q}^2$, 故满足 B.C. 的 D.E. 的乘积解可通过以依赖于时间的因子 $\exp(-b_{n,q}^2kt)$ 乘 $E_{n,q,m}$ 获得:

$$U_{n,q,m}(\rho,\varphi,\theta,t)=\exp(-b_{n,q}^2kt)E_{n,q,m}(\rho,\varphi,\theta). \quad (34)$$

为得到 (27) 的形式解, 取 $U_{n,q,m}$ 无限叠加:

$$U(\rho,\varphi,\theta,t)=\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-b_{n,q}^2kt)\sum_{m=-n}^{n}c_{n,q,m}E_{n,q,m}(\rho,\varphi,\theta). \quad (35)$$

置 $t=0$, 并令结果与 I.C. 中的 $f(\rho,\varphi,\theta)$[1]相等, 得到关系式

$$f(\rho,\varphi,\theta)=\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=-m}^{n}c_{n,q,m}E_{n,q,m}(\rho,\varphi,\theta). \quad (36)$$

如果 (36) 中的项除了有限项之外都是零, 则 (35) 是问题 (27) 的精确解. 作为应用来说我们想知道怎样的 (或如果) 一个充分好的函数 $f(\rho,\varphi,\theta)$, 在 $\rho=\rho_0$ 上为零, 在某个确定的误差之内可由这种有限和来逼近. 如果是这样, 则最大值原理可用来证明由这种逼近所获得的解逼近精确的解 (如果精确解存在的话), 可以证明球上热方程解的这种最大值原理. 在习题 15 中, 相对于球上的 $\langle f,g\rangle$(即, $f\bar{g}$ 在球上的积分) 我们证明了 $E_{n,q,m}$ 的正交性. 由通常形式运用正交性得到的系数 $c_{n,q,m}$ 的表示式是

$$c_{n,q,m}=\|E_{n,q,m}\|^{-2}\langle f,E_{n,q,m}\rangle, \quad (37)$$

其中

$$\begin{aligned}\|E_{n,q,m}\|^2 &=\langle E_{n,q,m},E_{n,q,m}\rangle=\langle S_{n,m},S_{n,m}\rangle\int_0^{\infty}(j_n(b_{n,q}\rho))^2\rho^2d\rho\\ &=\frac{4\pi(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}\frac{1}{2}\rho_0^3(j_n'(\beta_{n,q}))^2. \end{aligned} \quad (38)$$

[1] 原文误作 $f(\varphi,\theta)$.——译者

其中利用了 (13) 来得到 $\|S_{n,m}\|^2$(关于该积分的计算, 参看第 8.5 节的习题 4). 关于特征函数展开一致收敛的推论性结果隐含: 如果 $f(\rho,\varphi,\theta)$ 在球 $\rho \leqslant \rho_0$ 上是 C^2 的, 且在球面 $\rho=\rho_0$ 上为零, 则级数 (36) 一致收敛到 $f(\rho,\varphi,\theta)$. 就如我们已经看到的, 关于在一个确定的误差之内逼近 f 的项数的一般估计通常是很保守的. 而且, 一个积分比较检验典型地至少需要对系数 $c_{n,q,m}$ 的行为的一个粗略的认识, 这种行为可能不易确定. 因此, 实际上只是在某个方便的项数处截取级数, 并根据函数 $f(\rho,\varphi,\theta)$ 来检验截取的级数, 希望没有更多的系数需要计算. □

由 Cauchy-Riemann 算子生成的特征函数

下面我们来导出空间上 Laplace 算子所有乘积特征函数 $R(\rho)S(\varphi,\theta)$ 的公式. 特别, 推导了关于非奇异伴随的 Legendre 函数的公式 (11) 以及第 8.3 节关于函数 $R_n^{\pm}$ 的公式 (15). 这种生成所有期望的解的非平常的算子定义如下:

定义 Cauchy-Riemann 算子 $\partial_x + i\partial_y$ 是一阶微分算子, 它把每个 C^1 复值函数 $u(x,y,z)+iv(x,y,z)$ 赋值为函数

$$(\partial_x+i\partial_y)(u+iv)=(u_x-v_y)+i(u_y+v_x) \quad (\partial_x\equiv\frac{\partial}{\partial x}). \tag{39}$$

注记 在函数 $f=u+iv$ 只依赖于 (x,y) 的情形下, 由 (39) 可见条件 $(\partial_x+i\partial_y)f=0$ 与 Cauchy-Riemann 方程组相同, Cauchy-Riemann 方程组确保 f 是 $x+iy$ 的复解析函数. Cauchy-Riemann 算子在 $(\partial_x+i\partial y)\overline{(\partial_x+i\partial y)}=\partial_x^2+\partial_y^2$ 的意义下, 可视为是二维 Laplace 算子的平方根. 存在对任意维数 Laplace 算子的这种平方根, 要利用矩阵代数来构造. 物理学家 Paul Dirac (1902—1984, 他与 Schrödinger 分享了 1933 年度的 Nobel 物理学奖), 发现了关于电子更精确的波方程不是 Schrödinger 方程, 而是 Dirac 方程, Dirac 方程涉及波算子 $\partial_t^2-\partial_x^2-\partial_y^2-\partial_z^2$ 平方根, 即 **Dirac 算子** $\gamma_0\partial_t+\gamma_1\partial_x+\gamma_2\partial_y+\gamma_3\partial_z$, 它的系数是某个 4×4 矩阵, 可在许多关于量子场的书籍中找到 (例如, [Bjorken 和 Drell]). □

命题 1 (极坐标的 Cauchy-Riemann 算子)　令 $g(x,y)$ 是挖去一点的平面 $\mathbf{R}^2-(0,0)$ 上的 C^2 函数, 并令在极坐标下 $g(x,y)=G(r,\theta)$. 则

$$(\partial_x+i\partial_y)[g]=e^{i\theta}(\partial_r+\frac{i}{r}\partial_\theta)[G]=e^{i\theta}(G_r+\frac{i}{r}G_\theta). \tag{40}$$

而且, 如果 $G_\theta=0$(即 G 只依赖于 r), 则

$$(\partial_x+i\partial_y)^m[g]=e^{im\theta}r^m(\frac{1}{r}\frac{d}{dr})^m[G],\quad m=0,1,2,\cdots. \tag{41}$$

证明　在 (40) 的右边以等价的 $g_xx_r+g_yy_r=g_x\cos\theta+g_y\sin\theta$ 代替 G_r 以及以 $g_xx_\theta+g_yy_\theta=-g_xr\sin\theta+g_yr\cos\theta$ 代替 G_θ. 则对结果的代数简化得到 (g_x+ig_y), (40) 得证. 由 (40) 得知: 当 $m=1$ 时 (41) 成立. 由归纳法, 只要证明: 如果 (41) 对 $m=k$ 成立, 则 (41) 对 $m=k+1$ 成立. 然而,

$$\begin{aligned}(\partial_x+i\partial_y)^{k+1}[G]&=e^{i\theta}(\partial_r+\frac{i}{r}\partial_\theta)\left[e^{ik\theta}r^k\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^k[G]\right]\\&=e^{i(k+1)\theta}\left[kr^{k-1}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^k[G]+r^k\frac{\partial}{\partial r}\left(\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^k[G]\right)+\right.\\&\qquad\left.ki^2r^{k-1}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^k[G]\right]\\&=e^{i(k+1)\theta}r^{k+1}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^k[G],\end{aligned}$$

这证明了 $m=k+1$ 的结果, 正如所期望的. □

命题 2　如果 $F(\rho)$ 是只依赖于 $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的 C^∞ 函数, 则

$$(\partial_x+i\partial_y)^m[F(\rho)]=e^{im\theta}(\rho\sin\varphi)^m(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho})^m[F(\rho)],\quad m=0,1,2,\cdots \tag{42}$$

证明 固定 z, 考虑函数 $g(r) = F(\sqrt{r^2+z^2})$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$. 对 $\rho = \sqrt{r^2+z^2}$, 有 $\frac{1}{r}\partial_r g = \frac{1}{r}F'(\rho)\rho_r = \frac{1}{r}F'(\rho)\frac{1}{2}\frac{1}{\rho}2r = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}F$, 重复这种计算 m 次, 有 $(\frac{1}{r}\partial_r)^m[g] = (\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho})^m[F]$. 因此, 对每个固定的 z, 对函数 $g(r)$ 应用 (41), 得到 (42). □

定理 5 对 $n=0$ 和 $c=\pm1$, 令 $R_0^{\pm}(\rho)$ 是以下方程的非零解:

$$\rho^2 R''(\rho) + 2\rho R'(\rho) + (c\rho^2 - n(n+1))R(\rho) = 0. \tag{43}$$

(参看第 8.3 节中的 (14)).则, 对$n = 0, 1, 2, \cdots$,

$$(\partial_x + i\partial_y)^n[R_0^{\pm}(\rho)] = e^{in\theta}\sin^n(\varphi)\rho^n(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho})^n[R_0^{\pm}(\rho)], \tag{44}$$

(44) 是 $\triangle$ 具特征值 ±1 的特征函数. 而且, 对 $c = \pm1$,

$$R_n^{\pm}(\rho) \equiv \rho^n(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho})^n[R_0^{\pm}(\rho)], \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{45}$$

满足 (43), 且 $R_n^{\pm}(b\rho)$ 满足 $c = \pm b^2$ 的 (43).

证明 方程从 (42) 立刻得到. 由第 8.3 节的定理 1 得知 $\triangle[R_0^{\pm}(\rho)] \pm R_0^{\pm}(\rho) = 0$. 因关于 x, y 和 z 的求导次序没有关系 (即, 算子 ∂_x, ∂_y 和 ∂_z 是可交换的), 故有

$$\triangle\big((\partial_x + i\partial_y)^n[R_0^{\pm}(\rho)]\big) = (\partial_x + i\partial_y)^n\triangle[R_0^{\pm}(\rho)] = \pm(\partial_x + i\partial_y)^n[R_0^{\pm}(\rho)],$$

这说明 (44) 是 $\triangle$ 具特征值 ±1 的特征函数 ((44) 不恒为零的事实可由考虑例 6 中的幂级数得到). 由第 8.3 节的定理 1, 得知 $e^{in\theta}\sin^n\varphi$ 是球面调和函数 (它具有特征值 $n(n+1)$), 因它与以下的成比例

$$S_{n,n}(\varphi, \theta) = e^{in\theta}\sin^n\varphi P_n^{(n)}(\cos\varphi).$$

而且, 由第 8.3 节的定理 1, $R_n^{\pm}(\rho)$ 满足 $c = \pm1$ 的 (43), $R_n^{\pm}(b\rho)$ 满足 $c = \pm b^2$ 的 (43)(参看练习 8.3 的习题 4). □

定理 6 令

$$u_c(x,y,z) \equiv \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2-2c\rho\cos\varphi+c^2}} \equiv U_c(\rho,\varphi,\theta)$$

是标准调和位势在 z 方向平移 c 个单位 (参看例 3). 则对 $m=0,1,2,\cdots$, 有

$$(\partial_x+i\partial_y)^m u_c = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m e^{im\theta}\sin^m\varphi P_n^{(m)}(\cos\varphi)\rho^{-n-1}c^{n-m}. \tag{46}$$

此外, $\sin^m\varphi P_n^{(m)}(\cos\varphi)$ 满足伴随的 **Legendre** 方程 (5), 且对 $n\geqslant m$, 有

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{(n-m)!}(\partial_x+i\partial_y)^m\partial_z^{n-m}(\frac{1}{\rho}) &= e^{im\theta}\sin^m\varphi P_n^{(m)}(\cos\varphi)\rho^{-n-1}\\ &= S_{n,m}(\varphi,\theta)\rho^{-n-1}.\end{aligned} \tag{47}$$

证明 令 T_c 是平移算子, 它把每个函数 $f(x,y,z)$ 赋值为新函数 $f(x,y,z-c)$ (即, $T_c[f](x,y,z)=f(x,y,z-c)$). 该算子与诸算子 ∂_x, ∂_y 和 ∂_z 在 $\partial_x(T_c[f])=T_c[\partial_x f]$ (对 ∂_y 和 ∂_z 类似) 意义下是可交换的 (即是先平移然后求导还是先求导再平移所得的结果相同). 因此,

$$(\partial_x+i\partial_y)^m[u_c] = (\partial_x+i\partial_y)^m\left[T_c[u]\right] = T_c[(\partial_x+i\partial_y)^m[u]]. \tag{48}$$

由 (42), 有 (对 $m>0$)

$$\begin{aligned}(\partial_x+i\partial_y)^m[\frac{1}{\rho}] &= e^{im\theta}\sin^m\varphi\rho^m(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho})^m[\frac{1}{\rho}] = \cdots\\ &= (-1)^m 1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2m-1)\rho^{-m-1}e^{im\theta}\sin^m\varphi.\end{aligned} \tag{49}$$

为估算 (46), 把 T_c 作用到 (49). 我们有 $T_c[\rho]=\sqrt{\rho^2-2c\rho\cos\varphi+c^2}$ 和 $T_c[\sin\varphi]=T_c[\frac{r}{\rho}]=\frac{r}{T_c[\rho]}=\frac{\rho\sin\varphi}{T_c[\rho]}$, 因 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 T_c 下是不变的. 于是由 (48) 和 (49), 以及对 $m=0$ 情形的由公式 (9) 得出的, 有

$$\begin{aligned}&(\partial_x+i\partial_y)^m[u_c]\\ &= (-1)^m 1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2m-1)e^{im\theta}\sin^m\varphi\left[\frac{\rho^m}{(\rho^2-2c\rho\cos\varphi+c^2)^{m+\frac{1}{2}}}\right].\end{aligned} \tag{50}$$

方括号内的表示式本质上可通过如下反复对 $\omega=\cos\varphi$ 求导从 $(\rho^2-2c\rho\omega+c^2)^{-\frac{1}{2}}$ 获得:

$$\frac{d^m}{d\omega^m}[\rho^2-2\rho c\omega+c^2]^{-\frac{1}{2}}=1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2m-1)\rho^m c^m(\rho^2-2\rho c\omega+c^2)^{-m-\frac{1}{2}}. \quad (51)$$

因此, 由 (50),(51) 和 (9), 得

$$\begin{aligned}(\partial_x+i\partial_y)^m[u_c] &=(-1)^m c^{-m}\frac{d^m}{d\omega^m}([\rho^2-2\rho c\omega+c^2]^{-\frac{1}{2}}\sin^m\varphi e^{im\theta}\\ &=(-1)^m c^{-m}\frac{d^m}{d\omega^m}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\omega)\rho^{-n-1}c^n\Big)\sin^m\varphi e^{im\theta}\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\big((-1)^m e^{im\theta}\sin^m\varphi P_n^{(m)}(\cos\varphi)\rho^{-n-1}\big)c^{n-m}. \qquad (52)\end{aligned}$$

不求助于函数级数逐项求导的一致收敛定理可以证明该求和下求导是正当的. 的确, 对 $\rho>0$, $f(c)=\frac{d^m}{d\omega^m}\big([\rho^2-2\rho c\omega+c^2]^{-\frac{1}{2}}\big)$ 关于 c 有正当的幂级数展开, 因求导的次序没有关系, $f(c)$ 的 Taylor 系数幸好可先通过对 $[\rho^2-2\rho c\omega+c^2]^{-\frac{1}{2}}$ 关于 c 求导, 然后对 ω 求导 (求 m 次) 来计算. 结果 (47) 立刻从以下事实得到: (52) 中乘 c^{n-m} 的表示式必是

$$\frac{1}{(n-m)!}\frac{d^{n-m}}{dc^{n-m}}\big((\partial_x+i\partial_y)^m[u_c]\big)\Big|_{c=0}=\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}(\partial_x+i\partial_y)^m\partial_z^{n-m}[u].$$

由于 (47) 的左边是调和的, 故知右边的函数 $S_{n,m}(\varphi,\theta)$ 是球面调和函数, 于是 $\sin^m\varphi P_n^{(m)}(\cos\varphi)$ 满足伴随的 Legendre 方程 (5). □

概要 8.4

1. 球面调和函数: 根据定理 1, 每个 n 次齐次调和多项式 $u(x,y,z)$ 可写成形式 $U(\rho,\varphi,\theta)=\rho^n f(\varphi,\theta)$, 其中 $f(\varphi,\theta)$ 是 $\triangle_s$ 具特征值 $n(n+1)$ 的特征函数 (即, 球面调和函数). 反之, 由定理 1′, 每个 (C^2) 球面调和函数 $f(\varphi,\theta)$, 存在整数 $n\geqslant 0$, 使得 $\rho^n f(\varphi,\theta)$ 以 x,y 和 z 表示时是调和多项式. $f(\varphi,\theta)$ 的特征值是 $n(n+1)$, 且有 $2n+1$ 个线性无关的具特征值 $n(n+1)$ 的球面调和函数 (即 $\triangle_s$ 对应该特征值的特征空间具维数 $2n+1$). 这些线性无关的球面调和函数由以下实值函数给出

$$P_n(\cos\varphi),\quad P_{n,m}(\cos\varphi)\cos(m\theta)\quad 和\quad P_{n,m}(\cos\varphi)\sin(m\theta),\quad m=1,\cdots,n,$$

其中 $P_n(\cos\varphi)$ 和 $P_{n,m}(\cos\varphi)$ 由下面第 2 条款给出. 作为另一种表示法, 如果允许复系数, 则特征值为 $n(n+1)$ 的球面调和函数是以下的线性组合

$$S_{n,m}(\varphi,\theta)\equiv e^{im\theta}P_{n,m}(\cos\theta)=e^{im\theta}\sin^{|m|}\varphi P_n^{(|m|)}(\cos\varphi),\quad m=-n,\cdots,n.$$

2. Legendre 方程: 当利用分离变量来求方程 $\triangle_s f=-n(n+1)f$ 的乘积解 $f(\varphi,\theta)=L(\varphi)M(\theta)$ 时, 导致的常微是 $M''(\theta)+m^2M(\theta)=0$ 和

$$\sin\varphi[\sin\varphi L'(\varphi)]'+[n(n+1)\sin^2\varphi-m^2]L(\varphi)=0, \tag{S1}$$

当 $m=0$ 它称为 Legendre 方程, 对非零整数 m 称为伴随的 Legendre 方程. 记 $\omega=\cos\varphi$, n 阶 Legendre 多项式是 S1 的解, 由以下给出

$$P_n(\omega)\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(2n-2k)!(-1)^k}{k!(n-k)!(n-2k)!}\omega^{n-2k}.$$

前五个 Legendre 多项式是

$$P_0(\omega)=1,\quad P_1(\omega)=\omega,\quad P_2(\omega)=\frac{1}{2}(3\omega^2-1),\quad P_3(w)=\frac{1}{2}(5\omega^3-3\omega),$$
$$P_4(\omega)=\frac{1}{8}(35\omega^4-30\omega^2+3),\quad P_5(\omega)=\frac{1}{6}(63\omega^5-70\omega^3+15\omega).$$

对任意整数 m, (S1) 在球面上是 C^1 的唯一解是以下的常数倍

$$P_{n,m}(\cos\varphi)=P_{n,m}(\omega)\equiv(1-\omega^2)^{m/2}\frac{d^m}{d\omega^m}(P_n(\omega))=\sin^m\varphi P^{(m)}(\cos\varphi),\quad m>0,$$

和

$$P_{n,m}(\omega)\equiv P_{n,-m}(\omega),\quad m<0.$$

3. 正交性: 对 S 上的连续复值函数 $f(\varphi,\theta)$ 和 $g(\varphi,\theta)$, 定义

$$\langle f,g\rangle=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\varphi,\theta)\overline{g(\varphi,\theta)}\sin\varphi d\varphi d\theta.$$

如果 f 和 g 是 C^2 的, 则关于 φ 和 θ 分部积分, 得

单位球面上的 Green 公式: $\langle f,\triangle_s g\rangle=\overline{\langle g,\triangle_s f\rangle}=\langle\triangle_s f,g\rangle$,

在证明以下关于球面调和函数的正交性关系中用到该公式:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} S_{n,m}(\varphi,\theta)\overline{S_{n',m'}(\varphi,\theta)}\sin\varphi d\varphi d\theta$$
$$=\begin{cases}0, & \text{如果 } m\neq m' \text{ 或 } n\neq n',\\ \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{4\pi}{2n+1}, & \text{如果 } m=m' \text{ 和 } n=n'.\end{cases}$$

4. 球面上函数的 Laplace 级数: 定义在球面上函数的 Laplace 级数是

$$\text{LS } f(\varphi,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} c_{n,m}S_{n,m}(\varphi,\theta),$$

其中

$$\begin{aligned} c_{n,m} &= \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\varphi,\theta)e^{-im\theta}P_{n,m}(\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi d\theta \\ &= \|S_{n,m}\|^{-1}\langle f,S_{n,m}\rangle, \end{aligned}$$

$P_{n,m}$ 和 $S_{n,m}$ 由上述的第一和第二条款定义, 如果这些积分存在的话. 如果 f 是 C^2 的, 则 Laplace 级数 LS f 一致收敛到 f 由定理 4 得到保证.

5. Cauchy-Riemann 算子: Cauchy-Riemann 算子 $\partial_x+i\partial_y$ 是微分算子, 它把每个 C^1 复值函数 $u(x,y,z)+iv(x,y,z)$ 赋值为函数

$$(\partial_x+i\partial_y)(u+iv)=(u_x-v_y)+i(u_y+v_x).$$

该算子经由以下公式生成所有球面调和函数 (其中 $0\leqslant m<n$)

$$\frac{(-1)^n}{(n-m)!}(\partial_x+i\partial_y)^m\partial_z^{n-m}(\frac{1}{\rho})=e^{im\theta}\sin^m\varphi P_n^{(m)}(\cos\varphi)\rho^{-n-1}=S_{n,m}(\varphi,\theta)\rho^{-n-1},$$

该公式表明函数 $\sin^m\varphi P^{(m)}(\cos\varphi)$ 必满足伴随的 Legendre 方程 (参看定理 6). 而且该算子还用于从函数 $R_0^{\pm}(\rho)$ 获得函数 $R_n^{\pm}(\rho)$(参看定理 5).

练习 8.4

1. 选 (2) 中诸函数 $f(\varphi,\theta)$ 的一个函数并直接计算它是 $\triangle_s$ 具特征值 6 的特征函数.
2. 表述空间的一个旋转或旋转列, 使得
   (a) 把 x^2-y^2 变成 $2xy$, (b) 把 $2xy$ 变成 $2zx$,
   (c) 把 x^2-y^2 变成 y^2-x^2, (d) 把 $2xy$ 变成 y^2-z^2.

3. 对 $n=0,1,2,3$, 验证

(a) Legendre 多项式 $P_n(\omega)$(参看 (7)) 满足 $m=0$ 的 Legendre 微分方程 (6), 且

(b) 函数 $P_n(\cos\varphi)$ 满足 (5).

4. (a) 求关于 x,y 和 z 的 4 次调和多项式, 使得当它限制在球面 $\rho=1$ 上时, 产生的球面调和函数与 θ 无关 (参看例 2).

(b) 如果一球面调和函数与 φ 无关, 则它必为常数吗? 请解释.

5. 对 $n=2$ 以及 $m=1$ 和 2, 验证 (11) 中的 $P_{n,m}(\cos\varphi)$ 满足伴随的 Legendre 方程 (5).

6. (a) 把源于二次多项式的球面调和函数 (2) 表示为以下球面调和函数的线性组合

$$S_{2,m}(\varphi,\theta)=e^{im\theta}\sin^{|m|}\varphi P_2^{(|m|)}(\cos\varphi)\quad(-2\leqslant m\leqslant 2).$$

(b) 把 $\rho^2 S_{2,m}(\varphi,\theta)$ $(-2\leqslant m\leqslant 2)$ 的实部和虚部写成 x,y 和 z 的调和二次多项式.

7. 找出 7 个次数为 3 的调和多项式 $p(x,y,z)$, 它们中没有一个是其他的线性组合. 能找出 8 个吗? 为什么不能?

8. 证明伴随的 Legendre 方程 (5) 在 $[0,\pi]$ 上是 C^2 的任一解必是解 $P_{n,m}(\cos\varphi)$ 的常数倍.

提示 考虑两个解的 Wronski 行列式 $W(\varphi)\equiv y_1(\varphi)y_2'(\varphi)-y_1'(\varphi)y_2(\varphi)$, 并利用事实 (参看第 1.1 节的习题 20): $W(\varphi)=C\exp(-\int\cos\varphi/\sin\varphi d\varphi)=C/\sin\varphi$. 因此, 至少有两个线性无关的解在极线 $\varphi=0$ 或 $\varphi=\pi$ 上不是 C^1 的 (为什么?).

9. 一函数 $G(\omega,c)$ 称为是函数列 $f_0(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f_2(\omega),\cdots$ 的生成函数, 如果 $G(\omega,c)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(\omega)c^n$, $|c|<\epsilon$, 其中 ϵ 是某个正常数.

(a) 利用例 3 证明 $L(\omega,c)\equiv(1-2c\omega+c^2)^{-\frac{1}{2}}$ 是 Legendre 多项式函数列 $P_0(\omega)$, $P_1(\omega)$, $P_2(\omega),\cdots$ 的生成函数.

(b) 通过注意到 $L(1,c)=(1-c)^{-1}=1+c+c^2+\cdots(|c|<1)$, 推导 $P_n(1)=1$. 类似地推导 $P_n(-1)=(-1)^n$.

(c) 利用公式 $L(\omega,c)=(1-2c\omega+c^2)^{-\frac{1}{2}}$ 证明 $2c^2L_c+cL=(1-c^2)L_\omega$. 通过把两边写成幂级数然后令 c 的同次幂相等, 推断对 $n\geqslant 1$, 有 $(2n+1)P_n(\omega)=P_{n+1}'(\omega)-P_{n-1}'(\omega)$. 利用该结果得到事实 (在定理 4 的证明中用到): $P_0(\omega)+3P_1(\omega)+\cdots+(2n+1)P_n(\omega)=P_{n+1}'(\omega)+P_n'(\omega)$.

(d) 通过回顾定理 6 的证明, 对固定的正整数 m, 求伴随的 Legendre 函数列 $P_{0,m}(\omega)$, $P_{1,m}(\omega)$, $P_{2,m}(\omega),\cdots$ 的一个生成函数.

10. (a) 利用定理 3 中的结果 (13), 当 $m=m'=0$ 和 $n\neq n'$ 时, 证明 $\int_{-1}^{1}P_n(\omega)P_{n'}(\omega)d\omega=0$ (即, Legendre 多项式在 $[-1,1]$ 上是正交的).

(b) 利用 (a) 部分的结果以及习题 9(a) 推导

$$\int_{-1}^{1} \frac{d\omega}{1-2\omega c+c^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^{1} P_n(\omega)^2 d\omega c^{2n}. \qquad (*)$$

(c) 通过计算 (b) 部分中的积分并把结果展成关于 c 的幂级数, 比较 (*) 中的系数, 导出 $\int_{-1}^{1} P_n(\omega)^2 d\omega = \frac{2}{2n+1}$. 为什么该结果向我们提供了 $m=m'=0$ 和 $n=n'$ 情形的正交性关系 (13)?

(d) 证明

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_{n,m}(\omega)^2 d\omega &= \int_{-1}^{1} P_n^{(m)}(\omega)\left((1-\omega^2)^m P_n^{(m)}(\omega)\right)d\omega \\ &= \cdots(\text{经 } m \text{ 次分部积分})\cdots = \int_{-1}^{1} P_n(\omega)Q_n(\omega)d\omega,\end{aligned}$$

其中 $Q_n(\omega) = (-1)^m \frac{d^m}{d\omega^m}\left((1-\omega^2)^m P_n^{(m)}(\omega)\right)$ 是最高项为 $\frac{(n+m)!}{(n-m)!}a_n\omega^n$ 的 n 次多项式, a_n 是 $P_n(\omega)$ 中 ω^n 的系数.

(e) 解释为什么任意 k 次多项式可写成次数 $\leqslant k$ 的 Legendre 多项式的线性组合. 利用该事实和 (d) 部分推断

$$Q_n(\omega) = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}P_n(\omega) + c_{n-1}P_{n-1}(\omega) + \cdots + c_1P_1(\omega) + c_0P_0(\omega),$$

$c_0, \cdots, c_{n-1}$ 是常数.

(f) 利用 (a),(c),(d) 和 (e) 部分证明: 对 $0 \leqslant m \leqslant n$, $\int_{-1}^{1} P_{n,m}(\omega)^2 d\omega = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{2}{2n+1}$ 以及关系 (13) 成立.

11. (a) 求在球 $\rho < 1$ 上 Laplace 方程 $\triangle u = 0$ 的一个解 $u(x,y,z)$, 使得在球面 $\rho = 1$ 上有 $u(x,y,z) = x + y^2 + z^3$.

(b) 求在该球外 $\triangle u = 0$ 的仍然满足 (a) 部分边界条件的一个解, 且当 $\rho \to \infty$ 时解趋于零.

12. 令 $f(\varphi,\theta)$ 是 $\triangle_s$ 具特征值 $n(n+1)$ 的特征函数.

(a) 令

$$f_m(\varphi,\theta) \equiv e^{im\theta}\int_0^{2\pi} f(\varphi,\omega)e^{-im\omega}d\omega.$$

证明如果 $f(\varphi,\theta)$ 足够光滑使得可在积分号下求导, 则 $f_m(\varphi,\theta)$ 也满足 $\triangle_s f_m = -n(n+1)f_m$.

(b) 定义 $|\nabla f_m|^2 \equiv \nabla f_m \cdot \overline{\nabla f_m}$, 证明

$$|\nabla f_m|^2 \geqslant \frac{1}{\sin^2\varphi}\left|\frac{\partial}{\partial\theta}f_m\right|^2 = \frac{m^2}{\sin^2\varphi}|f_m|^2 \geqslant m^2|f_m|^2.$$

(c) 利用 (a),(b) 和 $\int_S \triangle_s f_m \overline{f_m} dA = -\int_S |\nabla f_m|^2 dA$, 证明: 如果 $|m| > n$, 则 $f_m = 0$.
(d) 由 (c) 和习题 8 推断 f 必是标准球面调和函数

$$S_{n,m}(\varphi,\theta) \equiv e^{im\theta} \sin^{|m|} \varphi P_n^{(|m|)}(\cos\varphi), \quad m = -n, \cdots, n$$

的线性组合.
(e) 由 (d) 推断任意关于 (x,y,z) 的 n 次调和多项式必是由 (12′) 通过乘以 ρ^n 得到的调和多项式的线性组合.

13. 令 H_n 表示所有限制在球面 $\rho = 1$ 上关于 x, y 和 z 的 n 次齐次调和多项式 (连同零函数) 的集合. 设 F 是该球面上的连续函数. 在以下部分我们证明: 存在 (唯一的)H_n 中的 h, 使得对任意 H_n 中其他的 k, $\|F-h\|^2 \equiv \langle F-h, F-h\rangle \equiv \int_S (F-h)\overline{(F-h)} dA$ 小于 $\|F-k\|$. 注意到 h 具有这样的特征: 它与球坐标系的选取无关. 将证明 $h = h_n \equiv \sum_{m=-n}^n c_{n,m} S_{n,m}$, 其中 $c_{n,m} \equiv \|S_{n,m}\|^{-2}\langle F, S_{n,m}\rangle$. 因此, 虽然在该和中的项会依赖于球坐标的选取, 但整个和与球坐标的选取无关.
(a) 令 k 属于 H_n. 由习题 12(e) 得知, 对某些常数 $a_{-n}, \cdots, a_n$, $k = \sum_{m=-n}^n a_m S_{n,m}$ (为什么?). 证明 $\langle h_n - k, F - h_n\rangle = 0$.
(b) 证明

$$\|F-k\|^2 = \langle (F-h_n) + (h_n - k), (F-h_n) + (h_n - k)\rangle = \|F-h_n\|^2 + \|h_n - k\|^2,$$

其中最后的等式是 (a) 部分的结果.
(c) 推断: 除非 $k = h_n$ (即, $h = h_n$), 有 $\|F-k\|^2 > \|F-h_n\|^2$.
(d) 证明 (c) 隐含定理 4 的证明中的 σ_N 如所宣称的, 确实不依赖于球坐标系北极的选取.

提示 $\sigma_N = \sum_{n=0}^N h_n$.

14. 令 σ_N 是定理 4 中的 (19) 中的二重和. 利用 (19) 证明当 $N \to \infty$ 时 $\|f - \sigma_N\|^2 \to 0$, 利用该结果证明 Parseval 等式

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^{n} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} |c_{n,m}|^2.$$

提示 证明 $\|f-\sigma_N\|^2 = \|f\|^2 - \langle f, \sigma_N\rangle - \langle \sigma_N, f\rangle + \|\sigma_N\|^2 = \|f\|^2 - \|\sigma_N\|^2$.

15. (a) 令 $f(\rho,\varphi,\theta)$ 和 $g(\rho,\varphi,\theta)$ 是球 $\rho \leqslant \rho_0$ 上的 C^2 函数, f 和 g 在边界上为零. 令 $\langle f, g\rangle$ 表示 fg(或 $f\bar{g}$, 如果 f 和 g 允许是复数) 在球上关于体元素 $\rho^2 \sin\varphi d\varphi d\theta$ 的积分. 证明 Green 公式 $\langle \triangle f, g\rangle = \langle f, \triangle g\rangle$.

提示 如果写成 (参看第 8.3 节的命题 1)$\triangle u = \rho^{-2}(\rho^2 U_\rho)_\rho + \rho^{-2}\triangle_s U$, 并利用单位球面上的 Green 公式 $\langle \triangle_s F, G\rangle = \langle F, \triangle_s G\rangle$(参看 (16)) 这个计算是很容易的.

(b) 令 $E_{n,q,m}$ 是由 (33) 定义的特征函数. 由 (a) 部分推断

$$\langle E_{n,q,m}, E_{n',q',m'} \rangle = 0 \quad \text{如果} \quad n \neq n',\ q \neq q' \quad \text{或} \quad m \neq m'.$$

提示 我们知道如果 $n \neq n'$ 或 $m \neq m'$, 该结果成立 (为什么?). 因此, 假设 $n = n'$, $m = m'$ 和 $q \neq q'$, 并利用 $\beta_{n,q} \neq \beta_{n,q'}$(参看 (31)). 于是, 我们避免了可能性: 对 $n \neq n'$ 和 $q \neq q'$, $\beta_{n,q} = \beta_{n',q'}$.

(c) 由 (b) 推断

$$\int_0^{\rho_0} j_n(\frac{\beta_{n,q}\rho}{\rho_0}) j_n(\frac{\beta_{n,q'}\rho}{\rho_0}) \rho^2 d\rho = 0, \quad \text{如果} \quad q \neq q'.$$

该结果可以怎样直接证明? 直接证明会更容易吗?

16. (a) 计算球 Bessel 函数 $j_1(\rho)$ 和 $j_2(\rho)$, 并证明它们满足径向方程 (28).

(b) 证明对小的 ρ, $j_1(\rho) \approx \frac{1}{3}\rho$ 和 $j_2(\rho) \approx \frac{1}{15}\rho^2$.

17. 解 (其中如在 (31) 中, $\beta_{n,q}$ 表示 j_n 第 q 个正零点)

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.} \quad u_t = k\triangle u, \quad \rho \leqslant 1, \quad t \geqslant 0;\\
&\text{B.C.} \quad U(1, \varphi, \theta, t) = 0;\\
&\text{I.C.} \quad U(\rho, \varphi, \theta, 0) = j_0(2\pi\rho) + j_1(\beta_{1,3}\rho)\cos\varphi + j_2(\beta_{2,1}\rho)\sin^2\varphi\sin(2\theta).
\end{aligned}$$

18. 假设例 6 的 (27) 中的 B.C. 由 $U_\rho(\rho_0, \varphi, \theta, t) = 0$(即球是绝热的). 令 $\gamma_{n,q}$ 表示导数 $j_n'(\rho)$ 等于零的第 q 个正数. 利用这些数 $\gamma_{n,q}$ 表示该新问题的形式解.

19. 把例 6 的 (27) 中的 D.E. 换成波方程 $u_{tt} = a^2\triangle u$ 并附加 I.C. $U_t(\rho, \varphi, \theta, 0) = 0$. 该新问题的形式解是什么?

20. (a) 论证关于在一薄形圆盘的内外两面都是绝热的匀质金属单位圆盘中的温度 $u = U(\varphi, \theta, t)$ 的热方程具有形式 $u_t = k\triangle_s u$.

(b) 当初始温度是 $U(\varphi, \theta, 0) = f(\varphi, \theta)$ 时形式求解该方程.

(c) 当 $f(\varphi, \theta) = 2\cos\varphi\sin^2\varphi\cos^2\theta$ 时求精确解.

(d) 证明对 $v_t = k\triangle_s v$ 任一解 v, 有

$$\frac{d}{dt}\int_S v^2 dA = -2k\int_S |\nabla v|^2 dA,$$

并推断 (c) 中得到的解是唯一的.

(e) 叙述和证明 $u_t = k\triangle_s u$ 解的最大值原理.

21. (a) 证明 C^2 函数 $\sin^3\varphi$ 的 Laplace 级数有无穷多项, 而 $\sin^3\varphi\cos(3\theta)$ 的 Laplace 级数只有一项.

(b) 利用定理 4 估计 $\sin^3\varphi$ 的 Laplace 级数的项数, 使得在误差 0.01 之内逼近 $\sin^3\varphi$.(勤

奋的读者可能希望计算该 Laplace 级数的系数以观察其收敛性是否确实是这样的结果.)

(c) 为什么对函数 $\sin\varphi$ 不能运用定理 4?

22. 证明每个 N 次齐次多项式 $p(x,y,z)$(不必是调和的) 可写成以下形式

$$p(x,y,z)=h_n(x,y,z)+\rho^2h_{n-2}(x,y,z)+\rho^4h_{n-4}(x,y,z)+\cdots,$$

其中 h_k 是 k 次调和多项式. 这种表示式唯一吗? 为什么?

提示　考虑 $p(x,y,z)$ 在单位球面上的 Laplace 级数并应用定理 2.

§8.5 特殊函数及其应用

在各种坐标系中经分离变量出现的那些常微的解具有如此重要性, 以至于对这些解给予命名, 并且需要非常仔细研究. 这样的解归入特殊函数的范畴. 第 8.4 节的 Legendre 函数 $P_{n,m}(\cos\varphi)$ 和球 Bessel 函数 $j_n(\rho)$ 就是特殊函数的例子. 本节我们将研究某些特殊函数 (例如 Bessel 函数), 它们在对柱体和圆盘的应用中是不可或缺的. 我们还考虑 Laguerre 多项式和 Hermite 函数, 它们出现在求解关于氢原子的量子力学和调和振荡子的 Schrödinger 方程中.

径向特殊函数

我们已经看到 (参看第 8.2 节的例 1) 特征函数方程 $\triangle u+cu=0$ 的解 u 立刻导出热方程 $u_t=k\triangle u$ 的解 $e^{-ckt}u$ 和波方程 $u_{tt}=a^2\triangle u$ 的解 $e^{\pm i\sqrt{c}at}u$. 而且, 更一般形式的方程

$$\triangle u+(f(\|x\|)+c)u=0, \tag{1}$$

(其中 f 是给定的点 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 到 $\mathbf{R}^n$ 中原点的距离 $\|\mathbf{x}\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ 的函数) 出现在某些热 (或波) 问题中, 其中温度 (或位移) 依赖于源项. 但这样的方程经常出现在量子力学中, 在本节的后面将考虑它们. 假设 (1) 在 2 维情形的乘积解具有形式 $R(r)H(\theta)$[用极坐标 (r,θ)], 和在 3 维情形的乘积解 $R(\rho)S(\varphi,\theta)$[用球坐标 (ρ,φ,θ)], 则分别得分离方程:

$$\begin{aligned}&H''(\theta)+m^2H(\theta)=0,\\&r^2R''(r)+rR'(r)+(cr^2-m^2+r^2f(r))R(r)=0,\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}&\triangle_sS(\varphi,\theta)+n(n+1)S(\varphi,\theta)=0,\\&\rho^2R''(\rho)+2\rho R'(\rho)+(c\rho^2-n(n+1)+\rho^2f(\rho))R(\rho)=0.\end{aligned}\tag{3}$$

称关于 $R(r)$ 和 $R(\rho)$ 的方程为**径向方程**. 在 $f(\rho)\equiv 0$ 的情形, 在第 8.4 节的定理 5 中已经看到, 对任意非零的 $c=\pm b^2$, (3) 的通解由 $R_n^{\pm}(b\rho)$ 给出, 其中

$$R_n^{\pm}(\rho)\equiv \rho^n(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho})^n[R_0^{\pm}(\rho)] \quad 和 \quad \begin{cases} R_0^{-1}(\rho)=(a_0e^{b\rho}+b_0e^{-b\rho})/\rho, \\ R_0^{+}(\rho)=(a_0\cos\rho+b_0\sin\rho)/\rho. \end{cases} \qquad (4)$$

当 $c=0$ 和 $f(r)\equiv 0$ 时, (2) 中的径向方程当 $m=0$ 时通解是 $K\ln r+C$, 以及对 $m=\pm1,\pm2,\cdots$, 通解是 $c_1r^m+c_2r^{-m}$, 而 (3) 的通解是 $c_1\rho^{-n-1}+c_2\rho^n$, $n=0,1,2,\cdots$. 注意到 (3) 的解 (4) 可表示为初等函数 (如, x^k, $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln x$) 的简单组合. 然而, 对 $f(r)\equiv 0$ 和 $c\neq 0$, 这种情形我们下面考虑, (2) 的解就不是这样.

Bessel 函数

在 (2) 中当 $c=1$ 和 $f(r)\equiv 0$ 时, 我们得到 m 阶 **Bessel方程**:

$$r^2R''(r)+rR'(r)+(r^2-m^2)R(r)=0. \qquad (5)$$

[Friedrich Wilhelm Bessel(1784—1846) 是德国天文学家, 他最先确定恒星 (不同于太阳) 到地球的距离. 他是第一位常规地使用 Bessel 函数.] 对每个 $m=0,1,2,\cdots$, 可证明 (5) 的一个解, 称为 m**阶第一类 Bessel 函数**, 可写成幂级数

$$J_m(r)=(\frac{r}{2})^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{4}r^2)^k}{k!(m+k)!}, \qquad (6)$$

它对所有的 r 收敛 (即使 r 是复数), 但已知 $J_m(r)$ 不能用初等函数代数表示. 这就是为什么我们先用球坐标而不是用极坐标或柱坐标来考虑特征方程 $\triangle u+cu=0$ 的一个理由. 如由图可看出 (参看下面的图 1 和第 8.4 节的图 2), 函数 $J_m(r)$ 与第 8.4 节的 (30) 定义的 (初等) 球 Bessel 函数 $j_n(\rho)$ 类似, 它们满足具 $c=1$ 和 $f(\rho)\equiv 0$ 的 "球 Bessel 方程"(3). 就像 $j_n(\rho)$ 可用来解实体球中的热问题和波问题, $J_m(r)$ 可用来解圆盘或圆柱中的这种问题. 的确, Bessel 函数也称作**柱函数**.

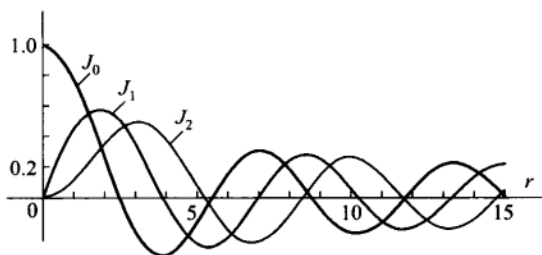


图 1

例 1 (振动圆形膜) 通过形式求解以下问题来确定一振动的半径为 $r_0 > 0$ 的圆状膜面位移的振幅

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad U_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),\quad x^2 + y^2 \leqslant r_0^2,\quad -\infty < t < \infty;\\&\text{B.C.}\quad U(r_0, \theta, t) = 0;\\&\text{I.C.}\quad U(r, \theta, 0) = f(r, \theta),\quad U_t(r, \theta, 0) = g(r, \theta).\end{aligned} \tag{7}$$

解 D.E. 和 B.C. 的乘积解 $T(t)R(r)H(\theta)$ 具有如下形式

$$[A\cos(bat) + B\sin(bat)]R_m(br)[C\cos(m\theta) + D\sin(m\theta)], \tag{8}$$

其中 $R_m(r)$ 满足 $c = b^2$ 的 (2), 且 $R_m(r_0) = 0$. 对 (2) 的任意两个非奇异解 $y_1(r)$ 和 $y_2(r)$, Wronski 行列式 $W = y_1y_2' - y_1'y_2$ 是 $C\exp(-\int \frac{1}{r}dr) = \frac{C}{r}$, 这表明 (2) 的两个线性无关的解中最多只有一个在 $r = 0$ 处是 C^1 的. 因此, $R_m(r)$ 必是 $J_m(br)$ 的常数倍. 由 (6), 对小的 r, 有 $J_m(r) \approx [2^m m!]^{-1}r^m$, 由此, 在原点附近 $J_m(r)\cos(m\theta)$ 和 $J_m(r)\sin(m\theta)$ 接近于 $\mathrm{Re}[(x+iy)^m]$ 和 $\mathrm{Im}[(x+iy)^m]$, 且解 (8) 可证明是处处 C^∞ 的. 令 $j_{m,q}$ 是满足 $J_m(r) = 0$ 的 r 的第 q 个正值. (这由上述图 1 中的图像揭示出来, 且可证明 J_m 有无穷多正零点 (参看第 4.4 节的例 8)). 则使得 (8) 满足 (7) 的 B.C. 的 b 具有形式 $J_{m,q}/r_0$. 为求形式解, 考虑

$$U(r,\theta,t) = \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[a_{m,q}\cos(\frac{aj_{m,q}t}{r_0}) + b_{m,q}\sin(\frac{aj_{m,q}t}{r_0})\right]J_m(\frac{j_{m,q}r}{r_0})e^{im\theta}, \tag{9}$$

其中, 对负整数 m, $J_m(r) \equiv (-1)^m J_{-m}(r)$. 为满足初始条件, 必须

$$f(r,\theta) = \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m,q}J_m(\frac{j_{m,q}r}{r_0})e^{im\theta} \tag{10}$$

和

$$g(r,\theta)=\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}b_{m,q}(\frac{aj_{m,q}}{r_0})J_m(\frac{j_{m,q}r}{r_0})e^{im\theta}. \tag{11}$$

在这些级数中的第 (m,q) 项是 Laplace 算子 (其中 $\partial_x=\frac{\partial}{\partial_x}$)

$$\triangle=\partial_x^2+\partial_y^2=\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r)+\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2$$

具特征值 $(j_{m,q}/r_0)^2$ 的特征函数 (为什么?). 显然, 对不同的 m 值, 这些项在圆盘 $r\leqslant r_0$ 上是正交的. 而且, 对具相同的 m, 但 q 不同的两项将有不同的特征值, 因此由 Green 公式 (参看习题 3(a)) 它们是正交的. 因而, 形式应用正交性, 得

$$a_{m,q}=\frac{1}{\Omega_{m,q}}\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}f(r,\theta)J_m\left(\frac{j_{m,q}\,r}{r_0}\right)e^{-im\theta}rdrd\theta \tag{12}$$

和

$$b_{m,q}=\frac{r_0}{aj_{m,q}\Omega_{m,q}}\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}g(r,\theta)J_m\left(\frac{j_{m,q}\,r}{r_0}\right)e^{-im\theta}rdrd\theta, \tag{13}$$

其中

$$\Omega_{m,q}\equiv 2\pi\int_0^{r_0}J_m\left(\frac{j_{m,q}\,r}{r_0}\right)^2rdr=\pi r_0^2\big(J_m'(j_{m,q})\big)^2, \tag{14}$$

(对最后的等式, 参看习题 3(b)). 作为第 8.6 节中的定理 3 (特征函数展开的一致收敛性) 的一个推论, 只要 f 和 g 在圆盘 $r\leqslant r_0$ 上是 C^2 的, 且在边界圆周 $r=r_0$ 上为 0, 则级数 (10) 和 (11) 将是一致收敛的. 因此, 在这种情形为了得到在任意给定的确定的实验误差之内满足 I.C. 的 D.E. 和 B.C. 的精确解, 可在对充分大的 q 和 m 处截取形式级数解 (9). □

注记 1 在 (7) 中的函数 f 只依赖于 r 的情形, 我们有如果 $m\neq 0$, 则 (10) 中的 $a_{m,q}=0$(为什么?), 且级数 (10) 是(0 阶)**Fourier-Bessel级数**

$$\text{FBS } f(r)\equiv\sum_{q=0}^{\infty}a_{0,q}J_0(\frac{j_{0,q}r}{r_0}),\quad \text{其中}\quad a_{0,q}=\frac{1}{\Omega_{0,q}}\int_0^{r_0}f(r)J_0(\frac{j_{0,q}r}{r_0})rdr, \tag{15}$$

$\Omega_{0,q}$ 由 (14) 给出. 如果 $f(r)$ 是定义在圆盘 $r\leqslant r_0$ 上的 C^2 函数, 则作为第 8.6 节定理 3 的一个特殊情形, FBS $f(r)$ 一致收敛到 $f(r)$. □

注记 2　在形式解 (9) 中的实部和虚部项是膜的**基本模式**. 在下面的图 2 中展示了在一固定时间的一些基本模式. 为方便起见, 我们已经选取 $r_0 = 1$. 随着时间的变化, 想象一下每个曲面在自身和它的反向之间的振荡. 由 (9) 可见, 对给定的 m 和 q, 一个模式的振荡的频率是 $aj_{m,q}/(2\pi r_0)$. 因此, 频率由 Bessel 函数的零点决定. 许多这些零点已经数值计算到若干位数, 在附录 6 中有一些零点的列表. 利用该表我们得到

$$j_{0,1} < j_{1,1} < j_{2,1} < j_{0,2} < j_{1,2} < j_{2,2} < j_{0,3} < j_{1,3} < j_{2,3} < j_{0,4} < j_{1,4} < j_{2,4}.$$

因此, 可得出图 2 中频率的排序. 对图 2 中显示的模式, 在第一栏中的所有的频率都低于右边栏的所有的频率, 但如果再添加一行的话就不成立了. 的确, $j_{3,1} > j_{0,2}$. 而且, 所展示的模式不具有十二个最低的可能的频率. □

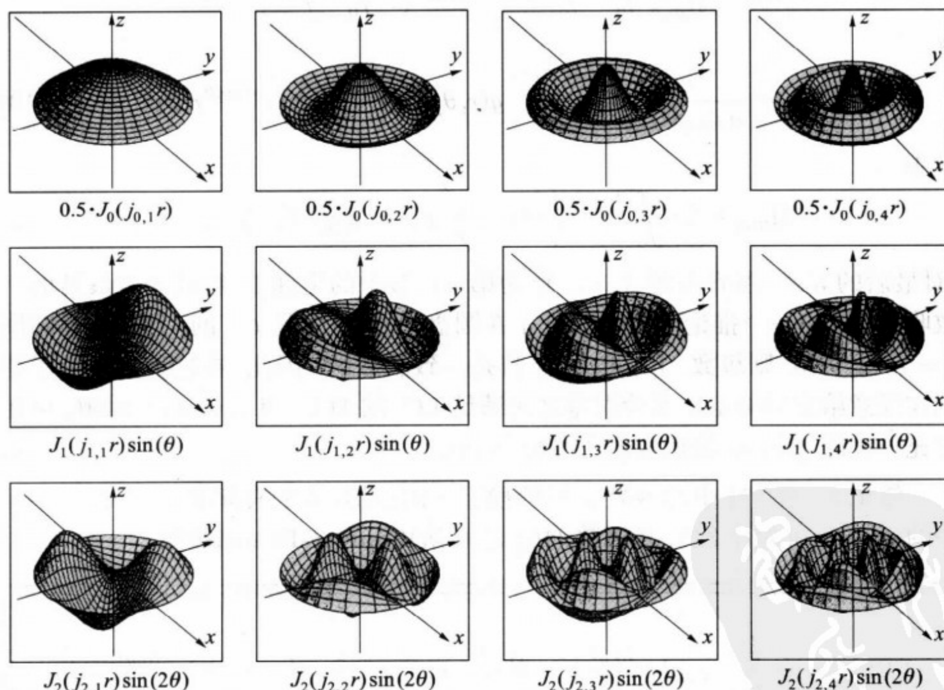


图 2

注记 3　Bessel 方程 (5) 的与 $J_m(r)$ 线性无关的第二个解是**第二类 Bessel 函数**, 记作 $Y_m(r)$ (Hankel 在 1869 年引入该函数). 如在例 1 中注意到的, 这些

函数在 $r=0$ 处必有奇异性. 的确, 对小的 r,

$$Y_0(r)\approx\frac{2}{\pi}\ln r \quad 和 \quad Y_m(r)\approx-\frac{(m-1)!}{\pi}(\frac{2}{r})^m, \quad m>0.$$

在振动环形膜面问题或在一圆环上的热问题中用到这样的解. 回忆一下在一圆环中稳态温度 (参看第 6.3 节) 的 Dirichlet 问题和 Neumann 问题需要用到径向方程 (2) 在适用于 Laplace 方程的 $c=0$ 的情形的奇异解 $\ln r$ 和 r^{-m}. 关于 $Y_m(r)$ 的精确公式以及对大的 r, $J_m(r)$ 和 $Y_m(r)$ 的渐进行为在附录 6 中有概述.

如下一个例子所说明的, 方程 (2) 在 $c=-b^2<0$ 的情形有很多的应用. 在这种情形, 解可由 $c=b^2$ 的 (2) 的解 $R(br)$ 以 ib 替换 b 得到. 这种解称作**修正的 Bessel 函数**. 例如, 以 ir 替换 $J_m(r)$ 中的 r, 并为了确保是实的, 以 $(-i)^m$ 相乘, 得以下满足以 $-(r^2+m^2)$ 替换 (r^2-m^2) 的 (5) 的修正的 Bessel 函数

$$I_m(r)\equiv(-i)^mJ_m(ir)=(\frac{r}{2})^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{4}r^2)^k}{k!(m+k)!}. \tag{16}$$

下面的图 3 展示了 I_0, I_1 和 I_2 的图像.

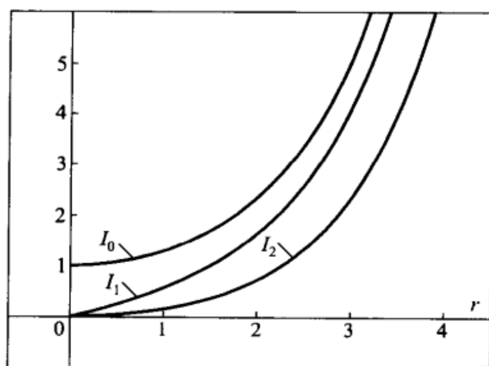


图 3

例 2 (圆柱中稳态温度分布) 考虑确定上下两面是绝热的, 侧面是给定温度的匀质实圆柱内的稳态温度分布问题:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0,\quad x^2+y^2\leqslant r_0^2,\quad 0\leqslant z\leqslant z_0;\\&\text{B.C.}\quad\begin{cases}U(r_0,\theta,z)=f(\theta,\frac{z}{z_0}),\\U_z(r,\theta,0)=0,\quad U_z(r,\theta,z_0)=0.\end{cases}\end{aligned}\tag{17}$$

与圆盘上 Dirichlet 问题相比较, 讨论当 $z_0 \to 0^+$ 时解的行为.

解 为求乘积解 $U(r,\theta,z) = R(r)H(\theta)Z(z)$, 由分离变量, 得

$$r^2R''(r)+rR'(r)+(-p^2r^2-m^2)R(r)=0, \quad H''+m^2H=0 \quad 和 \quad Z''+p^2Z=0. \tag{18}$$

注意到由 B.C., 必有 $p = p_n = \frac{n\pi}{z_0}$($n = 0,1,2,\cdots$) 和 $Z(z) = a_n \cos\frac{n\pi z}{z_0}$. 因 $H(\theta)$ 必是 θ 的周期函数, 故得 $H(\theta) = c_m e^{im\theta}$, $m = 0, \pm1, \pm2, \cdots$. 在 $n = 0$ 的情形, 得到关于 $R(r)$ 的非奇异的解 r^m. 在 $n \geqslant 1$ 的情形, 注意到由于 $J_m(br)$ 是 $r^2R''(r)+rR'(r)+(b^2r^2-m^2)R(r)=0$ 的解 (参看习题 1), 故如果取 $b = ip_n$, 我们将获得 (18) 中 $R(r)$ 的解. 因此取 $R_{m,n}(r) = (-i)^m J_m(ip_nr) = I_m(p_nr)$(参看 (16)). 为求形式解, 考虑

$$U(r,\theta,z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}c_{m,0}r^{|m|}e^{im\theta} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_{m,n}I_m\left(\frac{n\pi r}{z_0}\right)e^{im\theta}\cos\frac{n\pi z}{z_0}. \tag{19}$$

$U(r_0,\theta,z) = f(\theta,\frac{z}{z_0})$ 满足 B.C., 如果

$$\begin{aligned} f(\theta,\frac{z}{z_0}) &= U(r_0,\theta,z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}c_{m,0}\ r_0^{|m|}e^{im\theta} + \\ &\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_{m,n}I_m\left(\frac{n\pi r_0}{z_0}\right)e^{im\theta}\cos\frac{n\pi z}{z_0}. \end{aligned} \tag{20}$$

这是 $f(\theta,\frac{z}{z_0})$ 在 "矩形" $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant z_0$ 上的二重 Fourier 级数, 如果

$$c_{m,0} = \frac{1}{\pi z_0}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{z_0} f(\theta,\frac{z}{z_0})e^{im\theta}dzd\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 f(\theta,\zeta)e^{im\theta}d\zeta d\theta \quad (\zeta = \frac{z}{z_0})$$

以及对 $m = 0,\pm1,\pm2,\cdots$ 和 $n = 1,2,\cdots$,

$$c_{m,n} = \frac{1}{I_m(\frac{n\pi r_0}{z_0})}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 f(\theta,\zeta)\cos(n\pi\zeta)e^{im\theta}d\zeta d\theta.$$

作为第 8.2 节定理 1 的一个推论, 如果 $f(\theta,z)$ 是 C^3 的, 且满足 $f_z(\theta,0)=0$ 和 $f_z(\theta,1)=0$, 则级数 (20) 将一致收敛到 $f(\theta,z)$. 通过在充分大的 m 和 n 处截取形式级数 (19), 得到在实验误差之内的问题 (17) 的解. 当 $z_0 \to 0^+$, 我们应该获得具边界函数 $F(\theta) \equiv \int_0^1 f(\theta,\zeta)d\zeta$ 的圆盘上 Dirichlet 问题的解 (即, (19) 中的二重和应趋于 0). 事实上, 已知对大的 r, 有 $I_m(r) \approx e^r/\sqrt{2\pi r}$(不管 m 是多少;

参看 [Whittaker 和 Watson, p.373]). 因此,

$$\frac{I_m(\frac{n\pi r}{z_0})}{I_m(\frac{n\pi r_0}{z_0})} \approx \exp(-\frac{n\pi(r_0-r)}{z_0})\sqrt{\frac{r_0}{r}}.$$

于是, 至少对 $0<\epsilon<r<r_0-\epsilon$, 第二项和具有阶数 $\exp(\frac{-\pi\epsilon}{z_0})$, 当 $z_0\to 0^+$ 时, 它快速趋于零. 对 $0\leqslant r\leqslant \epsilon$, 有

$$\frac{I_m(\frac{n\pi r}{z_0})}{I_m(\frac{n\pi r_0}{z_0})} \leqslant \frac{I_m(\frac{n\pi \epsilon}{z_0})}{I_m(\frac{n\pi r_0}{z_0})} \approx \exp(-\frac{n\pi(r_0-\epsilon)}{z_0})\sqrt{\frac{r_0}{r}},$$

当 $z_0\to 0^+$ 时它也快速趋于零. □

对涉及到中心角为 α 的扇形内的热流问题, 必须求 $m=\frac{n\pi}{\alpha}$($n=1,2,3,\cdots$) 情形的 Bessel 方程 (5) 的解. 注意到 m 未必是整数, 除非 $\frac{\pi}{\alpha}$ 是整数. 因此, 在这种问题中考虑当阶 m 不是整数时 Bessel 方程的解是必要的. 在定义式 (6) 中, 出现数量 $(m+k)!$, 它只当 m 是整数时有意义. 因此, 当 m 不是整数时, (6) 中 $(m+k)!$ 以 $\Gamma(m+k+1)$ 来替换, 其中 Γ 是 **gamma函数**, 定义如下:

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx, \quad \text{对所有的实数}\quad s>0. \tag{21}$$

反复利用分部积分 (参看习题 6), 容易证明, 对正整数 n, 有 $\Gamma(n+1)=n!$. 因此, gama 函数可用来把阶乘函数延拓到所有的正实数. 特别,

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx=\int_0^\infty e^{-y^2}y^{-1}2ydy=\sqrt{\pi}.$$

而且, 由分部积分得到 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$, 由此我们得

$$\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}, \quad n=1,2,3,\cdots. \tag{22}$$

例 3 证明球 Bessel 函数 j_n(参看第 8.4 节的 (29) 和 (30)) 与 $J_{n+\frac{1}{2}}$ 以下面公式相联系

$$j_n(\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}J_{n+\frac{1}{2}}(\rho). \tag{23}$$

解 先证明 $R(\rho)$ 是三维径向方程 (3) 的解当且仅当 $\sqrt{r}R(r)$ 满足 $m=(n+\frac{1}{2})$ 的 Bessel 方程 (5):

$$\begin{aligned}
&r^2(\sqrt{r}R(r))''+r(\sqrt{r}R(r))'+(r^2-(n+\frac{1}{2})^2)\sqrt{r}R(r)\\
&=\sqrt{r}\big(r^2R''+rR'-\frac{1}{4}R+rR'+\frac{1}{2}R+(r^2-(n+\frac{1}{2})^2)R\big)\\
&=\sqrt{r}\big(r^2R''+2rR'+(r^2-n(n+1))R\big).
\end{aligned}$$

因此, $\sqrt{r}j_n(r)$ 是 $(n+\frac{1}{2})$ 阶 Bessel 方程的解. Bessel 方程不可能有在 $r=0$ 处是 C^1 的两个线性无关的解, 因 Wronski 行列式是 Cr^{-1}. 因此, 比 $\sqrt{r}j_n(r)/J_{n+\frac{1}{2}}(r)$ 是常数. 对小的 r, 我们有 (利用 (22) 和 (6))

$$J_{n+\frac{1}{2}}(r)\approx\frac{(\frac{r}{2})^{n+\frac{1}{2}}}{\Gamma(n+\frac{1}{2}+1)}=\frac{\sqrt{\frac{2r}{\pi}}r^n}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n+1)}\approx\sqrt{\frac{2r}{\pi}}j_n(r),$$

其中我们从以下的定义得到 $j_n(r)$ 的首项

$$\begin{aligned}
j_n(r)&\equiv(-1)^nr^n\big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\big)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}r^{2m}\\
&=(-1)^nr^n\big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\big)^{n-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m2m}{(2m+1)!}r^{2m-2}\\
&=(-1)^nr^n\big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\big)^{n-2}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(-1)^m2m(2m-2)}{(2m+1)!}r^{2m-4}\\
&=\cdots=\frac{r^n}{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n+1)}+\cdots.
\end{aligned}$$

□

Schrödinger 方程和量子力学

很微小的物体, 如原子中的电子, 它的许多行为不能用 Newton 的经典力学来充分刻画. 根据 Newton 经典力学, 受到给定作用力作用的物体沿着由它的初始位置和初始速度所决定的轨道运行. 的确, 关于人们能如何准确地同时度量一个物体的位置和速度, 自然界已经安置了一个基本的限制 —— 这种限制没有一种度量仪器可以克服的, 不管它是如何地先进. 更精确地, 在任一方向 (设为 $\mathbf{i}$ 方向), 对于质量是 M 的粒子 P, P 的坐标 x 的度量误差 δx 和 P 的速度在 $\mathbf{i}$

分量上的度量误差 δv_1 必须满足以下 (**Heisenberg)不确定关系**

$$\delta x \delta v_1 \geqslant \frac{\hbar}{2M}, \text{其中} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad \text{和} \quad h \approx 6.626 \times 10^{-27} \mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}. \qquad (24)$$

对一个几克重的物体, 误差的乘积是相当小的. 然而, 对质量 $\approx 9.108 \times 10^{-28}$g 的电子, 不管技术如何先进, 误差的乘积 $\delta x \delta v_1$ 必比 $0.5\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$ 大. 的确, 粒子具有确定的位置和速度的观点是有争议的. 对这类问题已经作过深入思考过的一些人得出结论: 粒子没有位置或速度, 它们与观察的行为无关. 因为不能可靠地利用位置和速度来描述微小粒子的状态, 故必须采用对粒子状态的不同的描述. 量子力学提供了对微小等级现象的令人惊讶的精确描述, 在这些微小等级现象中 Newton 力学证明是失效的. 根据量子力学 (以它的最简形式), 在固定时间一粒子的**量子状态**是定义在 $\mathbf{R}^3$ 上的复值函数 $\psi(x,y,z)$, 它称为 (Schrödinger)**波函数**. 状态 ψ 称为是**可正规化的**, 如果 ψ 在 $\mathbf{R}^3$ 上的模的平方的积分, 即

$$\|\psi\|^2 \equiv \int_{\mathbf{R}^3} |\psi(x,y,z)|^2 dxdydz$$

是有限的和非零的 (零函数不是一个允许状态). 两个状态视为等价的, 如果其中一个是另一个的常数倍, $\|\psi\|^2 = 1$ 的 ψ 称为是**正规化的**, 故为了达到 $\|\psi\|^2 = 1$, 总可用一个常数乘可正规化波函数. 对于一正规化状态 ψ, 粒子在空间任一给定的区域 A 的概率是 $\int_A |\psi|^2 dxdydz$, 是 $[0,1]$ 内的一个数 (例如, 如果 $A = \mathbf{R}^3$, 该积分等于 1, 表明该粒子确切地在 $\mathbf{R}^3$ 的某个地方). 因此, 波函数包含了关于粒子位置的某些信息, 但只是在概率的意义下. 的确, 称 $|\psi(x,y,z)|^2$ 给出粒子的可能位置云状团的概率密度. 状态 $\psi(x,y,z)$ 还提供了关于粒子速度的一些信息. 事实上, 粒子的可能速度 (v_1, v_2, v_3) 云状团的概率密度是平方模 $|\hat{\psi}(Mv_1/\hbar, Mv_2/\hbar, Mv_3/\hbar)|^2$, 其中 $\hat{\psi}$ 是 ψ 的 Fourier 变换. 不确定关系 (24) 是该事实的一个推论 (参看习题 10①).

考虑一质量为 M 的粒子, 受到具有形式 $-\nabla V(x,y,z)$ 的作用力 $F(x,y,z)$, $V(x,y,z)$ 为某个函数, 称为 F 的位势. 具有确定能量 E(从经典上来说, 是动能

①原文误为习题 13.——译者

加势能) 的量子状态满足偏微:

$$\frac{\hbar^2}{2M}\triangle\psi - V(x,y,z)\psi + E\psi = 0, \tag{25}$$

此称为 **Schrödinger方程**(与时间无关). 注意到方程 (25) 表明 ψ 是算子 $\frac{\hbar^2}{2M}\triangle - V$ 的特征函数, 能量 E 是相应的特征值. 由于与位势有关, 可能发生该算子的特征值不是任意的, 而是组成一个在某个特殊范围内的离散值的数列. 换言之, 粒子的可能能量, 它们囿于位势, 会限于一确定的离散数集. 谱分析表明原子发出和吸收确定波长 (或能量) 的光, 这是以下事实的推论: 根据量子力学, 原子中的电子的量子状态的可能能量是离散的. 但这不同于经典力学, 经典力学错误预测了能量的一个连续范围. 一个特别重要的情形是位势 V 只依赖于到原点的距离 ρ, 记为 $V = V(\rho)$. 在这种情形, Schrödinger 方程可写成以下形式

$$\triangle\psi + (f(\rho) + c)\psi = 0, \quad 其中 \quad f(\rho) = -\frac{2M}{\hbar^2}V(\rho) \quad 和 \quad c = \frac{2M}{\hbar^2}E. \tag{26}$$

V 的两个很重要的形式是 $V(\rho) = \frac{1}{2}k\rho^2$(**调和振荡子位势**; 参看习题 9) 和 $V(\rho) = -e^2\rho^{-1}$, 作为作用在氢原子中电子上的静电作用力的 **Coulomb位势**(由于带电荷 e 的中子), 我们在下面的例子考虑这种情形.

例 4 (氢原子中的电子状态) 利用 Schrödinger 方程证明: 由电子质量 $m_e = 9.108 \times 10^{-28}$g 和中子质量 $M_p \approx 1836m_e$ 组成的氢原子中正规化电子的状态 ψ 的可能负能量 E 具有形式 $E = E_n = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2}$, $n = 1, 2, \cdots$, 其中 $\mu = \frac{m_e M_p}{M_p + m_e} \approx m_e$ 是 “约化质量”, e 是电子的电荷. 确定具有这些能量的状态 ψ, 并证明, 不理会旋转, 具有能量 E_n 的有 n^2 个线性无关的状态.

解 因习惯上把原点取在中子的中心, 而不是电子和中子系统的质量中心, 故用 μ 代替 m_e 作为 Schrödinger 方程的质量, 但这样不会造成很大差别, 因为 $M_p \gg m_e$. 电子和中子之间的静电位势能是 $V(\rho) = -\frac{e^2}{\rho}$. 因此由 (25), 得

$$\frac{\hbar^2}{2M}\triangle\psi + \frac{e^2}{\rho}\psi + E\psi = 0. \tag{27}$$

假设 (27) 的一乘积解 $\psi = R(\rho)S(\varphi,\theta)$, 则由变量分离 (参看 (26) 和 (3)) 导出的径向方程是

$$\rho^2 R''(\rho) + 2\rho R'(\rho) + \Big[\frac{2\mu E}{\hbar^2}\rho^2 - l(l+1) + \rho^2\big(-\frac{2\mu}{\hbar^2}\big)\big(-\frac{e^2}{\rho}\big)\Big]R(\rho) = 0$$

或

$$\rho^2 R''(\rho)+2\rho R'(\rho)-(b^2\rho^2+l(l+1)-k\rho)R(\rho)=0,\quad b\equiv\frac{\sqrt{-2\mu}}{\hbar},\quad k\equiv\frac{2\mu e^2}{\hbar^2},\tag{28}$$

且 $S(\varphi,\theta)=S_{l,m}(\varphi,\theta)=e^{im\theta}\sin^{|m|}\varphi P_l^{(|m|)}(\cos\varphi)$, $l=0,1,2,\cdots$, $-l\leqslant m\leqslant l$. 不用 n 而用符号 l 是量子力学中的惯例, 因为 n 是留作用来表示标注能级 E_n 的. 对大的 ρ, 项 $b^2\rho^2$ 支配项 $l(l+1)$ 和 $k\rho$. 因此对大的 ρ, 我们希望 (28) 的通解与 $(c_1e^{b\rho}+c_2e^{-b\rho})/\rho$ 类似, 它是当项 $l(l+1)$ 和 $k\rho$ 没有时的通解. 为使 ψ 以这种逼近正规化, 必有 $c_1=0$, 且期望 $R(\rho)$ 以 $e^{-b\rho}$ 衰减 (当 $\rho\to\infty$ 时). 对小的 ρ, (28) 中的项 $b\rho^2$ 和 $k\rho$ 是可以忽略的, 在这种情形通解将表现得如 $d_1\rho^{-l-1}+d_2\rho^l$. 因此, 鉴于对大的 ρ 和小的 ρ (28) 的解的猜想的行为, 自然寻求 (28) 形如 $R(\rho)=L(\rho)\rho^le^{-b\rho}$ 的解. 把该形式代入 (28), 得到以下关于 $L(\rho)$ 的常微

$$\rho L''+2(l+1-b\rho)L'+(k-2b(1+l))L=0.\tag{29}$$

可以证明 [Schiff.1968](29) 的不是 ρ 的多项式的任一解必以 $e^{2b\rho}$ 增长, 这时 $R(\rho)=\rho^lL(\rho)e^{-b\rho}\approx\rho^le^{b\rho}$ 将不产生一个正规化函数 ψ. 令 $P_\nu(\rho)$ 是次数为 ν 首项为 ρ^ν 的多项式. 如果把 $P(\rho)$ 代入 (29), 则 (29) 的左边有最高次幂项 $(-2b\nu+k-2b(l+1))\rho^\nu$. 因此, 令 $n=\nu+l+1$(一个正整数), 我们不能得到次数为 ν 的多项式 $P_\nu(\rho)$, 除非 $(k-2bn)\rho^\nu=0$, 或

$$b=b_n\equiv\frac{k}{2n}\quad\text{或}\quad\frac{\sqrt{-2\mu E}}{\hbar}=\frac{2\mu e^2}{2n\hbar^2}\quad\text{或}\quad E=E_n=\frac{-\mu e^4}{2n^2\hbar^2}.\tag{30}$$

于是, 我们得到电子负能量的必要形式. 然而, 如果 E 是具 (30) 的形式, 则可逐次确定 $P_\nu(\rho)$ 的低次项的系数, 使得满足 (29). 因此, 对每个 n 和 l, 记作 $P_{n,l}(\rho)$(关于 $P_{n,l}(\rho)$ 显式公式参看下面的 (33)). 回忆一下 (见第 8.4 节的定理 2), 对每个 l, m 存在 $2l+1$ 个可能的值, 对应球面调和函数 $S_{l,m}(\varphi,\theta)$. 于是, 我们有一族具固定能量 $E_n(n=0,1,2,\cdots)$ 的正规化波函数:

$$\psi_{n,l,m}(\rho,\varphi,\theta)=P_{n,l}(\rho)\rho^le^{-b_n\rho}S_{l,m}(\varphi,\theta)\quad(l=0,1,\cdots,n-1;m=-l,\cdots,l).\tag{31}$$

对任给的 n, 这些波函数的个数是 $1+3+5+\cdots+(2(n-1)+1)=n^2$. 用一些努力, 可以证明没有其他具能量 E_n 的线性无关的正规化波函数 (如何证明?) □

注记 1 在 (31) 中, 数 n 称为状态的**全量子数**, 而 l 是**轨道角动量**, m 是**磁量子数**. 对每个波函数都有两个独立的 "旋转" 状态. 因此, 在第 n 个能级

壳层实际上有 $2n^2$ 个独立状态. 数列 $2, 8, 18, \cdots, 2n^2, \cdots$ 在元素周期表中出现. 的确, 在最外层 (最高) 能级壳层有相同电子数的元素具有类似的化学性质. 实际上, 在原子核中有 Z 个中子的原子必含有位势 $-Ze^2/\rho$, 因此 E_n 获得 Z^2 的因子, 并且一般而言, 在所有我们的计算中, e^2 必由 Ze^2 来代替. 更详细的分析 [Schiff, 1968] 表明原子中电子间的相互作用, 包括电子的旋转, 以及其他的作用, 实际上把 $2n^2$ 个状态分裂成 E_n 附近的许多能量簇. □

注记 2　对任意整数 $p, q \geqslant 0$, **广义的 Laguerre 多项式** $L_q^p(x)$ 是 **Laguerre 常微**

$$xL'' + (p+1-x)L' + qL = 0$$

的 q 次多项式解, 它由以下给出

$$L_q^p(x) = \sum_{s=0}^{q} \frac{(-1)^s}{s!} \frac{(p+q)!}{(p+s)!(q-s)!} x^s. \tag{32}$$

置 $x = \frac{k\rho}{n}$ 和 $F(x) = P_{n,l}(\rho)$, 得 (由在 (29) 后面给出的 $P_{n,l}(\rho)$ 的定义)

$$xF'' + ((2l+1)+1-x)F' + (n-l-1)F = 0,$$

此为 $p = 2l+1$ 和 $q = n-l-1$ 的 Laguerre 常微. 于是, 根据该常微至多存在一个独立的多项式解的事实 (为什么?), 我们有

$$\begin{aligned} P_{n,l}(\rho) &= c_{n,l} L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{n\rho}{k}\right) \\ &= c_{n,l} \sum_{s=0}^{n-l-1} \frac{(-1)^s}{s!} \frac{(n+l)!}{(2l+1+s)!(n-l-1-s)!} \left(\frac{n\rho}{k}\right)^s, \end{aligned} \tag{33}$$

$c_{n,l}$ 为某个常数. □

概要 8.5

1. 径向特殊函数:　当分离变量法用于方程 $\triangle u + (f(\|x\|) + c)u = 0$ 时, 二维情形用极坐标, 三维用球坐标, 我们分别得到以下方程:

$$H''(\theta) + m^2 H(\theta) = 0, \quad r^2 R''(r) + rR'(r) + (cr^2 - m^2 + r^2 f(r))R(r) = 0, \tag{S1}$$

$$\begin{aligned}&\triangle_s S(\varphi,\theta)+n(n+1)S(\varphi,\theta)=0,\\&\rho^2R''(\rho)+2\rho R'(\rho)+(c\rho^2-n(n+1)+\rho^2f(\rho))R(\rho)=0.\end{aligned}\tag{S2}$$

关于 $R(r)$ 和 $R(\rho)$ 方程称为径向方程. 当 $f(\rho)\equiv 0$ 和 $c=\pm b^2\neq 0$ 时, 方程 (S2) 的通解由 $R_n^{\pm}(b\rho)$ 给出, 其中, 如在第 8.3 节中证明的,

$$R_n^{\pm}(\rho)\equiv\rho^n\Big(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big)^n[R_0^{\pm}(\rho)]\quad 和\quad \begin{cases}R_0^-(\rho)=(a_0e^{b\rho}+b_0e^{-b\rho})/\rho,\\R_0^+(\rho)=(a_0\cos\rho+b_0\sin\rho)/\rho.\end{cases}\tag{S3}$$

然而, (S1) 的解 (对 $f(r)\equiv 0$) 不能用初等函数表示, 下面我们来刻画它们.

2. Bessel 函数: 当 $f(r)\equiv 0$ 和 $c=1$ 时, (S1) 是 m 阶 Bessel 方程:

$$r^2R''(r)+rR'(r)+(r^2-m^2)R(r)=0.\tag{S4}$$

当 m 是非负整数时, Bessel 方程对所有 r 是 C^1 的任意解必是由以下定义的 Bessel 函数 $J_m(r)$ 的常数倍,

$$J_m(r)=\Big(\frac{r}{2}\Big)^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{4}r^2)^k}{k!(m+k)!}.\tag{S5}$$

当 m 是任意正实数时, $J_m(r)$ 由公式 (S5) 定义, 只要 $(m+k)!$ 以 $\Gamma(m+k+1)$ 来替换, 其中 Γ 是由下面定义的 gamma 函数

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{s-1}dx,\quad 对所有实数\quad s>0.$$

(S3) 中的解 $R_n^+(\rho)$ 称为球 Bessel 函数, 且与半整数阶 Bessel 函数相联系. 例如, $J_m(r)$ 的球对应函数是

$$j_m(\rho)\equiv(-1)^n\Big(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\Big)^n\Big[\frac{\sin\rho}{\rho}\Big]=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}J_{n+\frac{1}{2}}(\rho).$$

Bessel 方程存在其他在 $r=0$ 有奇异性的解. 这些第二类 Bessel 函数的定义和性质在附录 6 中给出.

3. Bessel 函数在解偏微中的应用: 我们利用 Bessel 函数来解振动环形膜的波问题 (第 8.5 节例 1), 且发现修正的 Bessel 函数 $I_m(r)$ 出现在实柱体上下两面都是绝热的稳态温度问题的解中 (第 8.5 节例 2). 一般而言, Bessel 函数出现在涉及到柱区域或关于一坐标轴对称的区域上的问题.

4. Schrödinger 方程和量子力学: Heisenberg 不确定关系表明在粒子位置度量上的误差和在任一给定方向的速度度量上的误差的乘积不小于 $\frac{1}{2}\hbar/M$, 其中 M 是粒子的质量. 根据量子力学, 在一固定时间, 粒子的量子状态是定义在 $\mathbf{R}^3$ 上的复值函数 $\psi(x,y,z)$, 称为 (Schrödinger) 波函数. 如果 $\|\psi\|^2 \equiv \int_{\mathbf{R}^3} |\psi(x,y,z)|^2 dxdydz = 1$, 状态称为是正规化的, 对这种状态, 粒子将在 $\mathbf{R}^3$ 中的区域 A 中发现的概率是 $\int_A |\psi(x,y,z)|^2 dxdydz$. 具能量 E 且受到位势为 $V(x,y,z)$ 的作用力的粒子可由状态 ψ 来刻画,ψ 是以下 Schrödinger 方程 (与时间无关) 的一个解

$$\frac{\hbar^2}{2M}\triangle\psi - V(x,y,z)\psi + E\psi = 0. \tag{S6}$$

在例 4 中, 用 Schrödinger 方程来确定氢原子中电子囿于中子的 Coulomb 位势 $-\epsilon^2\rho^{-1}$ 的可能的能级和正规化状态. 对调和振荡位势 $\frac{1}{2}k\rho^2$ 对应的问题在习题 9 中提出.

练习 8.5

1. 证明: 如果 $F(r)$ 满足 Bessel 方程 $r^2F''(r) + rF'(r) + (r^2 - m^2)F(r) = 0$ $(b \neq 0)$, 则 $R(r) = F(br)$ 满足 $r^2R''(r) + rR'(r) + (b^2r^2 - m^2)R(r) = 0$. 用练习 8.3 的习题 4(b) 中的想法能做到这样吗?

2. (a) 形式应用分部积分来建立圆盘 $r \leqslant r_0$ 上 C^2 函数 f 和 g 的 Green 公式:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}(g(r,\theta)\triangle f - f(r,\theta)\triangle g)rdrd\theta = \int_0^{2\pi}(g(r_0,\theta)f_r(r_0,\theta) - f(r,\theta)g_r(r_0,\theta))r_0d\theta.$$

(b) 对定义在实体球 $\rho \leqslant \rho_0$ 上的函数 $f(\rho,\varphi,\theta)$ 和 $g(\rho,\varphi,\theta)$ 叙述和证明 Green 公式.

提示 特殊情形包含在第 8.4 节的习题 15 中 (也可参看第 8.3 节的例 3).

3. (a) 利用圆盘上的 Green 公式 (参看习题 2(a)) 证明对任意 $m = 0,1,2,\cdots$,

$$(\beta^2 - b^2)\int_0^{r_0} J_m(br)J_m(\beta r)rdr = r_0\big(bJ_m'(br_0)J_m(\beta r_0) - \beta J_m(br_0)J_m'(\beta r_0)\big). \quad (*)$$

(b) 假设 $J_m(\beta r_0) = 0$. 为得出 $\int_0^{r_0} J_m(\beta r)^2 rdr = \frac{1}{2}r_0^2 J_m'(\beta r_0)^2$, (*) 两边关于 b 求导然后令 $b = \beta$.

(c) 假设 (a) 中的公式对 b 和 β 是复数时仍然是有效的, 证明对任意不是实数的 z, $J_m(z)$ 不会为零.

提示 如果 $J_m(z) = 0$, 则经检查定义 J_m 的幂级数, 证明 $J_m(\bar{z}) = 0$. 在 (a) 部分取 $r_0 = 1$, $b = z$ 和 $\beta = \bar{z}$ $(r_0 = 1)$, 并注意到 z 是纯虚数的情形不同处理.

4. (a) 利用球上的 Green 公式 (参看习题 2(b)) 证明对 $n=0,1,2,\cdots$,

$$(\beta^2-b^2)\int_0^{\rho_0} j_n(b\rho)j_n(\beta\rho)\rho^2 d\rho=\rho_0^2\big(bj_n'(b\rho_0)j_n(\beta\rho_0)-\beta j_n(b\rho_0)j_n'(\beta\rho_0)\big),\quad (**)$$

其中 $j_n(\rho)\equiv(-1)^n\big(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\big)^n\big[\frac{\sin\rho}{\rho}\big]$.

(b) 假设 $j_n(\beta\rho_0)=0$. 为得到 $\int_0^{\rho_0} j_n(\beta\rho)^2\rho^2 d\rho=\frac{1}{2}\rho_0^3 j_n'(\beta\rho_0)^2$(参看习题 3(b)), 对 (**) 两边关于 b 求导, 然后令 $b=\beta$.

5. (a) 求以下问题的形式解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=k(u_{xx}+u_{yy}),\quad x^2+y^2<r_0^2,\quad t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad U(r_0,\theta,t)=0,\quad -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi;\\&\text{I.C.}\quad U(r,\theta,0)=f(r,\theta).\end{aligned}$$

(b) 对 B.C. 由 $U_r(r_0,\theta)=0$ (即, 圆盘的边缘是绝热的) 替换的情形求形式解.

6. 证明 $\Gamma(n+1)=n!$, $n=1,2,3,\cdots$.

7. 求 $\triangle$ 在楔形 $(0\leqslant r\leqslant r_0,\ 0\leqslant\theta\leqslant\alpha)$ 上的特征函数, 这些特征函数在边界 $\theta=0$, $\theta=\alpha$, $r=r_0$ 上为零. 什么类型的热问题和波问题能用这些特征函数来求解? 请给出一些例子.

8. 假设例 2 中的 B.C. 由 $U(r_0,\theta,z)=0$ $(0\leqslant z\leqslant z_0)$, $U(r,\theta,0)=0$, $U(r,\theta,z_0)=f(r,\theta)$ $(0\leqslant r\leqslant r_0)$ 替换. 求该情形的形式解.

9. 本题我们确定受到具位势 $V(\rho)=\frac{1}{2}k\rho^2=\frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)$(即, 调和振荡位势) 的弹性力 $F=-\nabla V=-k\rho_\rho$ 作用, 质量为 m 的粒子的可能能量 E 和相应的可正规化波函数 (量子状态).

(a) 证明 Schrödinger 方程 $-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi+\frac{1}{2}k\rho^2\psi=E\psi$ 的乘积解具有形式 $X(x)Y(y)Z(z)$, 其中

$$-\frac{\hbar^2}{2m}X''+\frac{1}{2}kx^2X=e_1X,\quad -\frac{\hbar^2}{2m}Y''+\frac{1}{2}ky^2Y=e_2Y$$

和

$$-\frac{\hbar^2}{2m}Z''+\frac{1}{2}kz^2Y=e_3Z,$$

e_1, e_2 和 e_3 是常数, 满足 $e_1+e_2+e_3=E$.

(b) 证明: 如果记 $X(x)=f(\alpha x)$, 则通过取 $\alpha=[\frac{km}{\hbar^2}]^{\frac{1}{4}}$ 和 $\lambda_1=\hbar^{-1}\sqrt{\frac{m}{k}}e_1$, 关于 X 的方程转换成常微 $-\frac{1}{2}F''(\alpha x)+\frac{1}{2}(\alpha x)^2F(\alpha x)=\lambda_1F(\alpha x)$. 由练习 7.2 的习题 16 推导: 当 $\lambda_1=n+\frac{1}{2}$ 时, $n\geqslant 0$ 为某个整数, 我们有速减解 $X_n(x)=H_n(\alpha x)e^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2}$, 其中 H_n 是第 n 阶 Hermite 多项式.

(c) 从 (b) 中推断: 当 E 具 $(N+\frac{3}{2})\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}$ 形式时 ($N\geqslant 0$ 是整数), 我们有以下满足 (a) 部分的 Schrödinger 方程的可正规化波函数

$$\psi_{n,m,p}(x,y,z)=H_n(\alpha x)H_m(\alpha y)H_p(\alpha z)e^{-\frac{1}{2}\alpha^2\rho^2},\quad \text{只要}\quad n+m+p=N.$$

(d) 用一些努力可以证明 Schrödinger 方程有可正规化解的唯一能量 E 是具 (c) 中的形式, 且对第 N 级能量的任一可正规化波函数是 (c) 中独立的波函数的线性组合. 证明存在 $\frac{1}{2}(N+1)(N+2)$ 个具有 (c) 中形式的波函数.

(e) 粒子会有零能量吗? 最小能量是什么?

10. 假设质量为 M 的粒子的量子状态由一正规化的速减的波函数 $\psi(x,y,z)$ 给出. 度量粒子可能位置的 x 坐标的均值是 $\bar{x} \equiv \int_{\mathbf{R}^3} x|\psi(x,y,z)|^2 dxdydz = \langle x\psi, \psi\rangle$ (即, 概率密度为 $|\psi(x,y,z)|^2$ 的粒子概率云状团重心的 x 坐标). x 度量的标准差 (即, 典型误差) 是

$$\delta x = \sqrt{\langle (x-\bar{x})^2\psi, \psi\rangle} = \|(x-\bar{x})\psi\|.$$

可能速度 (v_1, v_2, v_3) 云状团的概率密度是 (根据量子力学)

$$\omega(v_1,v_2,v_3) = (\frac{\hbar}{M})^{\frac{3}{2}}\hat{\psi}(\frac{Mv_1}{\hbar}, \frac{Mv_2}{\hbar}, \frac{Mv_3}{\hbar}),$$

其中 $\hat{\psi}$ 是 ψ 的 Fourier 变换. 同样, 粒子速度的 $\mathbf{i}$ 分量的度量均值是 $\bar{v}_1 = \langle v_1\omega, \omega\rangle$, 标准差是

$$\delta v_1 = \sqrt{\langle (v_1-\bar{v}_1)^2\omega, \omega\rangle} = \|(v_1-\bar{v}_1)\omega\|.$$

(a) 利用 $(\partial_x\psi)\hat{}(\xi) = i\xi\hat{\psi}(\xi)$ 和 Parseval 等式 (参看第 7.3 节) 证明

$$\|(v_1-\bar{v}_1)\omega\| = \frac{\hbar}{M}\|-i\partial_x\psi - \frac{M}{\hbar}\bar{v}_1\psi\|, \quad \text{其中} \quad \partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}.$$

(b) 利用 Cauchy-Schwarz 不等式 $|\langle f,g\rangle| \leqslant \|f\|\|g\|$ 证明

$$\begin{aligned}\|(x-\bar{x})\psi\|\|-i\partial_x\psi - \frac{M}{\hbar}\bar{v}_1\psi\| &\geqslant |\langle (x-\bar{x})\psi, -i\partial_x\psi - \frac{M}{\hbar}\bar{v}_1\psi\rangle| \\ &\geqslant \mathrm{Im}\big[\langle (x-\bar{x})\psi, -i\partial_x\psi - \frac{M}{\hbar}\bar{v}_1\psi\rangle\big].\end{aligned}$$

(c) 证明 (b) 中最后一个表示式是 $\mathrm{Im}[\langle x\psi, -i\partial_x\psi\rangle]$.

(d) 证明

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}[\langle x\psi, -i\partial_x\psi\rangle] &= -\frac{1}{2}i\big[\langle x\psi, -i\partial_x\psi\rangle - \langle -i\partial_x\psi, x\psi\rangle\big] \\ &= \frac{1}{2}\langle \partial_x(x\psi) - x\partial_x\psi, \psi\rangle = \frac{1}{2}\langle\psi,\psi\rangle.\end{aligned}$$

(e) 由上述推断不确定关系 $\delta x\delta v_1 \geqslant \frac{1}{2}\hbar/M$ 成立.

(f) 假设 $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$ 和 $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = \bar{v}_3 = 0$. 证明: 如果 $\delta x = \delta y = \delta z$ 和 $\delta x\delta v_1 = \delta y\delta v_2 = \delta z\delta v_3 = \frac{1}{2}\hbar/M$ (即, 不确定是最小值的), 则 ψ 必是在一调和振荡位势 (参看习题 9) 中的粒子的基态 (最小能量状态). 对这种状态弹性常数 k 对 δx 是如何相联系的?

§8.6 求解流形上的偏微

在本节我们定义在 $\mathbf{R}^n$ 中称为有边或无边的光滑 k–流形的相当一般的 k 维子集上的函数的 Laplace 算子. 定义方法与 $\mathbf{R}^3$ 中单位球面上 (作为二维流形的例子), 通过在法线方向把 f 延拓成常数, 然后对经过延拓的函数取通常的 Laplace 运算来定义 Laplace 算子 $\triangle_s$ 的方法相同. 然后研究 "紧"k–流形上 Laplace 算子的特征函数和特征值的一般性质. 叙述了在流形上充分可微的函数的特征函数展开的一致收敛定理, 并给出了证明的参考文献. 求解流形上的热方程, 波方程和 Poisson-Laplace 方程要用到这些特征函数展开. 我们还通过 Laplace 算子的特征函数和特征值直接构造 Green 函数来表明如何用积分表示解. 我们强调前面关于热方程, 波方程和 Laplace 方程的许多内容是本节一般观点的特殊情形, 本节充实我们已经学过的内容. 流形的概念已经成为现代理论物理中描述宇宙的基础部分, 从广义相对论空间 – 时间连续统一体到作用在基本粒子的波函数上的连续对称群. 也因为这个理由, 我们相信让读者接触流形是有益的. 对流形以及相关概念更深入的介绍我们推荐 [Abraham, Marsden 和 Ratiu].

$\mathbf{R}^n$ 中 k–流形的定义以及它的 Laplace 算子

令 f_1, f_2 和 f_3 是定义在 $\mathbf{R}^3$ 中某开集 B 上的 C^∞ 函数. 对 B 中每个点 $P(x,y,z)$, 存在仍在 $\mathbf{R}^3$ 中的赋值的点 $F(P)=(f_1(P),f_2(P),f_3(P))$. 如果当 P 取遍 B 时点 $F(P)$ 的集合是一个开集 C, 则称 F 是从 B 到 C 上的**光滑映照**. 如果还存在 C 到 B 上的光滑映照 G, 使得对 B 中所有的 P, 有 $G(F(P))=P$, 则称 F 是 B 到 C 的微分同胚 (即, 对开集 B 和 C, 微分同胚是 B 到 C 上的光滑映照, 它存在从 C 到 B 的光滑逆映照). 类似地, 对 $n=1,2,3,4,\cdots$, 可定义从 $\mathbf{R}^n$ 中的开集到 $\mathbf{R}^n$ 中另一个开子集的微分同胚概念. 令 k 和 n 是满足 $1\leqslant k\leqslant n$ 的整数. $\mathbf{R}^n$**标准 k 维子空间** (记作 $\mathbf{R}^k_n$), 是 $\mathbf{R}^n$ 中形如 $(x_1,x_2,\cdots,x_k,0,\cdots,0)$ 的点的集合, 其中 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 是任意实数, 在它们后面跟着 $n-k$ 个零 (例如, $\mathbf{R}^2_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的 xy–平面, $\mathbf{R}^1_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的 x–轴). $\mathbf{R}^n$**中标准的闭 k–维半空间**是 $\mathbf{R}^k_n$ 中具有非负的第一个坐标 (即, $x_1\geqslant 0$) 的所有点的子集 $\mathbf{H}^k_n$ (例如, $\mathbf{H}^2_3$ 是

$\mathbf{R}^3$ 中的半平面 $x \geqslant 0,\ z = 0$).

> **定义** $\mathbf{R}^n$ **中的**(光滑)k–**流形**是 $\mathbf{R}^n$ 中具有以下性质的子集 M. 对 M 中的每点 P, 存在 $\mathbf{R}^n$ 中的开集 B 和一个从 B 到包含 P 的一个开集 C 的微分同胚 F, 对 B 中某个 P', $P = F(P')$, 使得 (参看图 1)F 把 B 与 $\mathbf{H}_n^k$ 的交集映到整个 C 与 M 的交集. 如果 P' 在 $\mathbf{H}_n^k$ 的边缘上, 则 M 上对应的点 P 称为 M 的**边界点**. M 的所有边界点的集合称为 M 的**边界**, 记作 ∂M.

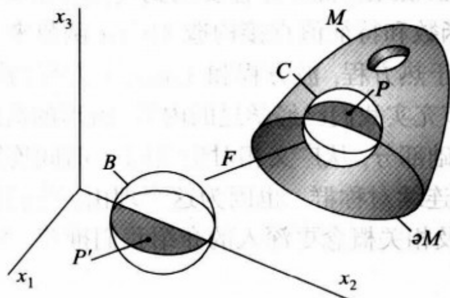


图 1

例 1 明确地验证由 $\rho = 1,\ z \geqslant 0,\ x > 0$ 定义的四分之一球面 Q 是 $\mathbf{R}^3$ 的 2–流形, 它的边界是由 $\rho = 1,\ z > 0,\ x > 0$ 定义的半赤道 E.

解 设映射 F 把开长方体 B, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2},\ \frac{1}{2} < z < 2$ 中的每点 (x, y, z) 映成点

$$F(x, y, z) = (z\cos x\cos y, z\cos x\sin y, z\sin x).$$

这是从 B 到由 $\frac{1}{2} < \rho < 2$ 定义, 落在半空间 $x > 0$ 的球壳的一部分(设为 C) 的微分同胚. 的确, F 的逆 G 由以下定义 (参看习题 1), 对 C 中任一点 (x, y, z),

$$G(x, y, z) = (\sin^{-1}(\frac{z}{\rho}), \sin^{-1}(\frac{y}{r}), \rho), \quad 其中 \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad 和 \quad \rho = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

F 把交集 $B \cap \mathbf{H}_3^2$ 映到四分之一球面 Q 上. 而且 $B \cap \mathbf{H}_3^2$ 的边缘 $x = 0$ 映到 E 上, 则此为 ∂Q. □

注记 在 $F(B)$ 包含了所有的 Q 的意义下, 上述例子是简单的. 为了确保预期的流形的每点包含在某个 $F(B_i)$ 中, 通常需要用到多个定义在开集 B_1, $B_2, \cdots$ 上的微分同胚 $F_1, F_2, \cdots$. 例如, 为了证明半球面 $\rho = 1$, $z \geqslant 0$ 是具赤道圆作为边界的 2–流形, 我们需要不止一个微分同胚, 因为整个赤道圆周在单个微分同胚下不可能是 $\mathbf{H}_3^2$ 的边缘直线的一部分的图像 (为什么?). 我们同样需要两个微分同胚来表明球面 $\rho = 1$ 是无边的 2–流形. □

幸运的是, 有了一些经验之后, 当看到一个流形时通常容易辨认出来, 而且只有很少的情况需要费事地去证明一给定的 $\mathbf{R}^n$ 中的子集是流形. 粗略地说来 $\mathbf{R}^n$ 中的一 k–流形是 $\mathbf{R}^n$ 的一个 "光滑" 的 k 维子集, 在它的任一点, 比如 P 处的一个充分小的开 n 维球, 或相似于一 (可能是弯曲的)k 维圆盘 (如果 P 不是边界 ∂M 的部分), 或相似于一具有 $k-1$ 维包含 P 的 "平坦" 部分的 k 维半圆盘 (如果 P 是 ∂M 的部分). 下面的图 2 中列出了一些 $\mathbf{R}^3$ 中的 2–流形. 自然要把这些曲面想象为光滑的, 没有这些由于计算机生成的角点. 这些曲面中只有第一个有边界, 它由两个圆周组成.

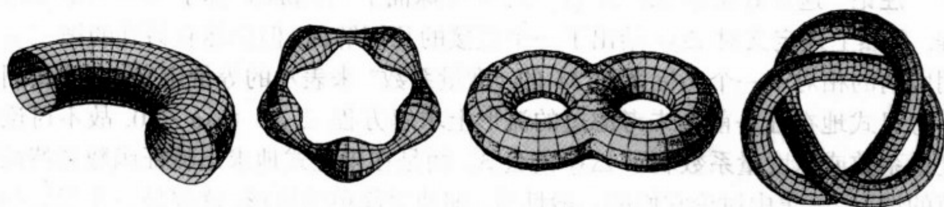


图 2

有一些相当简单的物体不是 (光滑)k–流形. 例如, 空间中交于一条直线的两个平面不构成一流形, 因为这个物体在相交直线上的任一点的一个邻域内局部上不相似于单个圆盘或半圆盘. 方体的曲面不是光滑流形, 因为对 $\mathbf{H}_3^2$ 中的圆盘施行微分同胚不会产生角点. 同样的理由, 圆锥体不是一个光滑流形, 闭长方体也不是. 至于一自然物体或系统有没有数学角点问题是相当无意义或至少是不相干的 (例如, 考虑在 "角点" 附近的原子). 大多数出现在 "现实" 应用中的区域在实验误差之内可由光滑 k–流形逼近, 此断言似乎是合理的. 考虑到在描述即使是相当简单的机械、电器或经济系统中会出现大数量的变量, 故只限于关注 $k \leqslant 3$ 或甚至 $k \leqslant 1000$ 的情形是不够的.

令 f 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 中具边界 ∂M(可能是空的) 的 k–流形 M 上的函数. 可以证明 (参看 [Lang, p.96]) f 可延拓到 $\mathbf{R}^n$ 中包含 M 的某个开集 A 上的函数 $\bar{f}$, 使得 $\bar{f}$ 在每条落在 A 内, 与 M 垂直相交一点的线段上为常数. 我们称 f 在 M 上是 C^2 的, 如果 $\bar{f}$ 在 A 是 C^2 的. 则由于 $\bar{f}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中的开集 A 上是 C^2 的, 故对 $\bar{f}$ 应用 $\mathbf{R}^n$ 中的 Laplace 算子

$$\triangle_n \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

是有意义的.

$\triangle_M$ 的定义 我们由 $\triangle_M f(P) \equiv \triangle_n \bar{f}(P)$, 对所有 M 中的点 P 来定义在 M 上的 C^2 函数 f 的 **Laplace算子** $\triangle_M$, 其中 $\bar{f}$ 是上述定义的 (f) 延拓, 它在M的法线方向等于常数. 等价地,$\triangle_M f(P)$ 是 $\bar{f}$ 沿着 k 条与 M 相切并垂直交于 P 的直线的二阶导数的和.

注记 这正好是第 8.3 节 (7) 中(单位球面上) Laplace 算子 $\triangle_s$ 的定义过程. 虽然上述定义对 $\triangle_M$ 给出了一个直接的几何解释, 但仍然有另外的把 $\triangle_M$ 用所谓的相对于一个坐标系的 M 的 "度量系数" 来表示的等价定义. 由于我们不想显式地在任一前面未考虑过的流形上求解方程 $\triangle_M u + \lambda u = 0$, 故不讨论度量系数或以度量系数表示 $\triangle_M$ 的公式. 而是在未显式地求出特征函数和特征值的情况下, 集中讨论它们的一般性质. 即使对简单的流形, 这都是一个艰巨的任务. □

$\triangle_M$ 在 k–流形 M 上的特征函数和特征值

在解 $\mathbf{R}^n$ 中 k–流形 M 上偏微 (比如热方程 $u_t = \triangle_M u$) 的边值问题中, 求出 $\triangle_M$ 满足边界条件的特征函数是所期望的. 当然, 在流形无边的情形 (例如, 球面曲面) 没有边界, 因而没有边界条件. 为了可以应用叠加原理, 边界条件必须是齐次和线性的. 我们局限在下面描述的标准类型. 令 f 是 k–流形上的 C^2 函数 (即, f 延拓成上述的 C^2 函数 $\bar{f}$). **f在 ∂M 上点 P 的外法向导数**是 $\bar{f}$ 沿着唯一的单位向量 $\mathbf{n}_p$ (在 P 点出发的) 的方向导数,

$$\partial_\nu f(p) \equiv \nabla \bar{f} \cdot \mathbf{n}_p. \tag{1}$$

该向量与 ∂M 垂直, 与 M 相切, 指向离开"由所有 M 中除了 ∂M 的点组成的 (M 的)"**内点**M^0 方向, 我们引入一个相当一般的齐次边界条件如下. 令 N 是 (可能是空的)∂M 与 $\mathbf{R}^n$ 的某个开子集的交集, 令 D 是 ∂M 中不是 N 中的点的集合 (即, $D = \partial M - N$). 令 u 是在 M 上为常值, 在 $M^0 \cup N$ 是 C^1 的函数. 则提出以下边界条件是有意义的

$$\text{B.C.} \begin{cases} u = 0, & \text{于 } D \text{ 上}, \\ \partial_\nu u = 0, & \text{于 } N \text{ 上}. \end{cases} \tag{2}$$

在 N 是空集的特殊情形, (2) 是 Dirichlet 条件, 当 D 是空集时, (2) 是 Neumann 条件. 我们称 $\mathbf{R}^n$ 中的 k–流形是**紧致的**, 如果它是 $\mathbf{R}^n$ 中的闭子集且包含在一个充分大的 n–维球内 (参看附录 4). 自此假设所有的流形是紧致的, 且在下述意义下是**连通的**: M 中的任意两点可由一条落在 M 中的连续曲线相连接. 下面的基本结果原本在 [Chavel,1984] 中叙述, 但完全的证明 (以对大学生能理解的形式) 似乎不是出现在一个地方, 而是散布在文献中的结果的一个推论. 作为可读入门的文献, 我们推荐 Jozef Dodziuk 的文章 *Eigenvalues of the Laplacian and the heat equation*, Amer. Math. Monthly. Vol. 88(1981), 686–695.

定理 1 (Dirichlet/Neumann 特征值问题) 令 M 是 $\mathbf{R}^n$ 中紧致 k–流形, 具边界 $\partial M = D \cup N$(可能是空集). 对每个实数 λ, 问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad \triangle_M u + \lambda u = 0, \quad \text{于 } M \text{ 上}; \\ &\text{B.C.} \quad \begin{cases} u = 0, & \text{于 } D \text{ 上}, \\ \partial_\nu u = 0, & \text{于 } N \text{ 上}, \end{cases} \end{aligned} \tag{3}$$

最多有有限多个线性无关的解 (即, 对给定的特征值 λ 的特征空间是有限维的). 这些解在下述意义下是 M 上 C^∞ 的, 它们可延拓到 ($\mathbf{R}^n$ 的) 一个包含 M 的开子集上的 C^∞ 函数. 使问题有非零解的 λ 值构成数列 $0 \leqslant \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$, 其中每个特征值重复的次数与它的特征空间的维数相等.

注记 对大的 q, 特征值 λ_q 的性质由 Weyl 公式给出

$$\boxed{\lambda_q \sim 4\pi^2\left(\frac{q}{\omega_k \mathrm{Vol}(M)}\right)^{\frac{2}{k}}, \quad \text{当} \quad q \to \infty \quad \text{时},} \tag{4}$$

其中 ω_k 是 $\mathbf{R}^k$ 中 "实体" 单位球的 k 维 "体积"(即, $\omega_3 = 4\pi/3$, $\omega_2 = \pi$, $\omega_1 = 2$, 一般 $\omega_k = \pi^{k/2}/\Gamma(1+\frac{1}{2}k)$, 其中 Γ 是 gamma 函数 (参看第 8.5 节的 (21) 和 (22)), $\mathrm{Vol}(M)$ 是 k–流形 M 的 k 维体积 (例如, 当 $k=2$ 时是曲面面积). 符号 $\sim$ 的精确含义是 (4) 式左边和右边之比当 $q \to \infty$ 时趋于 1. [Hermann Weyl (1885—1955) 是德国数学物理学家, 他对相对论, 量子力学和纯数学做出了意义深远的贡献.] Weyl 公式的证明见 [Chavel, 第六章和第七章]. □

例 2 就 M 是由区间 $[0, L]$ 组成的 1–流形直接证明 Weyl 公式的有效性. 考虑所有可能的 B.C.(2).

解 如果 M 是区间 $[0, L]$, B.C. 由 $u(0) = 0$ 和 $u(L) = 0$ 给出, 则我们有 $\triangle = \frac{d^2}{dx^2}$ 具特征值 $\lambda_q = (\frac{(q+1)\pi}{L})^2$ 的特征函数 $\sin\left(\frac{(q+1)\pi x}{L}\right)$, 其中 $q = 0, 1, 2, \cdots$. 注意到因为 $k = 1$ 和 $\mathrm{Vol}(M) = L$, 所以

$$4\pi^2\left(\frac{q}{\omega_k \mathrm{Vol}(M)}\right)^{\frac{2}{k}} = 4\pi^2\left(\frac{q}{2L}\right)^2 = \left(\frac{q\pi}{L}\right)^2 \sim \left(\frac{(q+1)\pi}{L}\right)^2 = \lambda_q.$$

类似地, 对 B.C. $u'(0) = 0$, $u'(L) = 0$, 我们有 $\lambda_0 = 0$ 和 $\lambda_q = (\frac{q\pi}{L})^2$. 而对 $u'(0) = 0$, $u(L) = 0$, 有 $\lambda_q = \left((q+\frac{1}{2})\pi/L\right)^2$. 于是, Weyl 公式 (4) 在所有这些情形是有效的. □

我们可用下面方式定义 $\mathbf{R}^n$ 中紧致 k–流形上连续函数的积分. 当 $k = n$ 时, M 的内点是 $\mathbf{R}^n$ 的开子集且边界是一光滑 $(n-1)$–流形. 积分用通常的方式定义, 但引入矩形剖分构成 Riemann 和逼近, 然后令网状的范数趋于零. $k < n$ 时, 我们用下面的做法. 对每个 $\epsilon > 0$, 令 $\mathbf{R}^n$ 中的集合 M_ϵ 是由 $\mathbf{R}^n$ 中所有这样的点组成, 它们能与 M 用一长度 $\leqslant \epsilon$ 且与 M 垂直相接触的线段相连. 对足够小的 ϵ, M_ϵ 的每点由唯一的最短线段 (长度不超过 ϵ) 与 M 相连. 令 f 是 M 上的连续函数, 并通过在这些最短线段上令 f_ϵ 是常值把 f 延拓到定义在 M_ϵ 上的连续函数 f_ϵ. 令 I_ϵ 是 f_ϵ 在 M_ϵ 上的积分, M_ϵ 是 "好的" n 维闭有界集. 现 I_ϵ 依赖于 ϵ, 且 $\lim_{\epsilon \to 0^+} I_\epsilon = 0$, 因为 I_ϵ 几乎是与正规的 $(n-k)$ 维半径为 ϵ 的圆盘

的体积 $\omega_{n-k}(\epsilon) \equiv \epsilon^{n-k}\pi^{(n-k)/2}/\Gamma(1+\frac{1}{2}k)$ 成比例. 定义

$$\int_M f(P)dM(P) \equiv \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{I_\epsilon}{\omega_{n-k}(\epsilon)}. \tag{5}$$

虽然 (5) 在左边定义了整个表示式, 然而我们可把符号 "$dM(P)$" 视为 M 的 "体积元素"(例如, 对单位球面, $dM(\varphi,\theta)=\sin\varphi d\varphi d\theta$).

定义 对定义在 $\mathbf{R}^n$ 中的紧致 k–流形 M 上的两个连续复值函数 f 和 g, 定义内积

$$\langle f,g\rangle = \int_M f(P)\overline{g(P)}dM(P). \tag{6}$$

定理 2 (紧致 k–流形上的 Green 公式) 令 f 和 g 是 $\mathbf{R}^n$ 中紧致 k–流形上的实值 C^2 函数. 则

$$\langle\triangle_M f,g\rangle - \langle f,\triangle_M g\rangle = \int_{\partial M} g(Q)\partial_\nu f(Q) - f(Q)\partial_\nu g(Q)d\partial M(Q), \tag{7}$$

其中右边当 ∂M 是空集时定义为零.

注记 我们略去证明, 这个证明典型地用到许多技术性的方法来完成的 (参看 [Abraham, Marsden 和 Ratiu; 第七章]), 但 (在最后的分析中) 它转化到微积分的基本定理, 就如一维的情形. 作为一个相对简单的证明, 可先建立 $\mathbf{R}^n$ 中 n–流形的 Gauss 散度定理, 这可用本质上跟高等微积分书籍中同样的方法达到. 其次, 对 $k<n$, 可把这个结果应用到上述的 M_ϵ 上得到 M 上的 Gauss 散度定理. 则 M 上的 Green 公式易由 M 上的 Gauss 散度定理得到 (参看习题 10). □

注意到如果 f 和 g 满足 B.C.(2), 则 (7) 的右边为零, 由此得, 具不同特征值, 比如 λ_i 和 λ_j 的特征值问题的两个实值解 u_i 和 u_j 必是正交的 (即, $\langle u_i,u_j\rangle=0$). 甚至在一个维数是 d 的特征空间之内, 我们可找出 d 个两两正交且具单位长度的函数. 由此, 存在问题 (3) 的实值 C^∞ 函数列 $u_0,u_1,u_2,\cdots$, 使得

$$\triangle_M u_0 = -\lambda_0 u_0,\quad \triangle_M u_1 = -\lambda_1 u_1,\quad \triangle_M u_2 = -\lambda_2 u_2,\cdots \tag{8}$$

其中

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad i, j = 0, 1, 2, \cdots.$$

虽然我们已经取这些 u_q 为实值的, 但在有些情况中考虑复值特征函数是方便的 (例如, 第 8.4 节的球调和 $S_{n,m}(\varphi, \theta)$). 为了处理这种情形, 所有我们考虑的都能做平凡的修改.

定义 令 f 是 M 上的函数, 使得对 (8) 中所有函数 $u_q(\ q = 0, 1, 2, \cdots)$ 积分$\langle f, u_q \rangle$ 存在. 则f **的特征函数展开**($P \in M$) 是表示式

$$\mathrm{E}\ f(P) \equiv \sum_{q=0}^{\infty} c_q u_q(P), \quad 其中 \quad c_q = \|u_q\|^{-2} \langle f, u_q \rangle = \langle f, u_q \rangle, \tag{9}$$

注记 本质上, 所有 Fourier 级数 (不理会角点问题), 以及球面上的 Laplace 级数和圆盘上完全 Fourier-Bessel 级数都是 (9) 的特殊情形. 虽然下面的结果很少用这里给出的形式叙述, 但它通过简单修改在 [Palais] 中已知的结果得到. □

定理 3 (特征函数展开的一致收敛性) 令 M 是一紧致 k-流形, 令 f 是满足 B.C.(2) 的 C^m 函数, 其中 $m > k/2$. 令 $u_0, u_1, u_2, \cdots$ 是由 (8) 给出的特征函数列. 则 E f 在下述意义下在 M 上一致收敛到 f

$$\lim_{N \to \infty} \left(\max_{P \in M} |S_N(P) - f(P)| \right) = 0, \tag{10}$$

其中 $S_N(P)$ 是 E $f(P)$ 的 N 项部分和.

流形上标准的初边值问题

在定理 4 和定理 5 中, 当初始条件中的函数是 (8) 中的特征函数 $u_0, u_1, u_2, \cdots$ 的有限线性组合时, 这样的函数 (由定义) 满足 B.C., 我们给出紧致 k-流形 M 上标准热问题和波问题的解. 换言之, 我们假设初始数据在实验误差之内由这样的和来近似, 根据定理 3 这是合理的. 本质上, 作为特殊的情形, 定理 4 和定理 5 包括了前面所有关于热问题和波问题在有界区域 (例如, 有限区间, 圆

盘, 球面, 球和长方体区域, 不理会 "角点技术性问题") 上的结果, 在这些问题中 D.E. 和 B.C.(Dirichlet 或 Neumann) 是齐次的, 且假设 I.C. 中的函数是乘积解的空间部分的有限线性组合. 证明由简单地把所给的解代入 D.E., B.C. 和 I.C. 来验证这些方程满足. (记住对所有的 $q=0,1,2,\cdots$, $\triangle_M u_q=-\lambda_q u_q$. 实际上, 求解过程的困难部分是求出显式表示式或 u_q 和 λ_q 的逼近, 以及用 u_q 令人满意地来表示初始函数. 定理 4 和定理 5 表明解是用 u_q 和 λ_q 来表示的简单表示式.

定理 4(齐次热问题) 对一紧致 k–流形 M,

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=\kappa\triangle_M u,\quad \text{于 M 上},\quad t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad \begin{cases}u=0, & \text{于 } D \text{ 上}\\ \partial_\nu u=0, & \text{于 } N \text{ 上};\end{cases}\\&\text{I.C.}\quad u(P,0)=f(P)=\sum_{q=0}^{Q}c_q u_q(P)\end{aligned}\tag{11}$$

的解是

$$u(P,t)=\sum_{q=0}^{Q}c_q e^{-\lambda_q\kappa t}u_q(P).\tag{12}$$

定理 5(齐次波问题) 对一紧致 k–流形 M,

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2\triangle_M u,\quad \text{于 } M \text{ 上},\quad -\infty<t<\infty;\\&\text{B.C.}\quad \begin{cases}u=0, & \text{于 } D \text{ 上},\\ \partial_\nu u=0, & \text{于 } N \text{ 上};\end{cases}\\&\text{I.C.}\quad u(P,0)=f(P)=\sum_{q=0}^{Q}a_q u_q(P),\quad u_t(P,0)=g(P)=\sum_{q=0}^{Q}b_q u_q(P)\end{aligned}\tag{13}$$

的解是

$$u(P,t)=\sum_{q=0}^{Q}\Big(a_q\cos(\sqrt{\lambda_q}at)+\frac{b_q}{a\sqrt{\lambda_q}}\sin(\sqrt{\lambda_q}at)\Big)u_q(P),\tag{14}$$

其中括号中的第二项当 $\lambda_q=0$ 时理解为 $b_q t$.

下面两个定理表明特征函数展开也产生非齐次热方程和非齐次波方程的解，这些方程分别出现在有热源或强迫振动的情形. 证明照样是把所给的解直接代入 D.E.,B.C. 和 I.C. 去验证它们是满足的. 在每种情形, 通过假设解具有形式 $u(P,t)=\sum_{q=0}^{Q}\beta_q(t)u_q(P)$, 把它代入 $D.E.$ 得到关于 $\beta_q(t)(q=0,1,2,\cdots,Q)$ 的常微, 然后求解这些常微, 满足由 I.C. 隐含的初始条件. 作为另一种解法, 可以利用 Duhamel 原理, 根据该原理可通过对相应的一组初值问题 (参看第 3.4 节和第 5.3 节) 的解组成连续叠加 (即, 积分) 来构造解.

定理 6 (带源的热问题) 对一紧致 k–流形 M,

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t(P,t)=\kappa\triangle_M u(P,t)+\varphi(P,t),\quad \text{于 } M \text{ 上},\quad t\geqslant 0;\\ &\text{B.C.}\quad \begin{cases}u=0, & \text{于 } D \text{ 上},\\ \partial_\nu u=0, & \text{于 } N \text{ 上};\end{cases}\\ &\text{I.C.}\quad u(P,0)=0\end{aligned}\tag{15}$$

带热源 $\varphi(P,t)=\sum\limits_{q=0}^{Q}\alpha_q(t)u_q(P)$

的解是 $$u(P,t)=\sum_{q=0}^{Q}\left[\left(e^{-\lambda_q\kappa t}\int_0^t e^{\lambda_q\kappa s}\alpha_q(s)ds\right)u_q(P)\right].\tag{16}$$

定理 7 (带源的波问题) 对一紧致 k–流形 M,

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{tt}(P,t)=a^2\triangle_M u(P,t)+\varphi(P,t),\quad \text{于 } M \text{ 上},\quad -\infty<t<\infty;\\ &\text{B.C.}\quad \begin{cases}u=0, & \text{于 } D \text{ 上}\\ \partial_\nu u=0, & \text{于 } N \text{ 上}\end{cases}\\ &\text{I.C.}\quad u(P,0)=0\quad u_t(P,0)=0\end{aligned}\tag{17}$$

带源 $\varphi(P,t)=\sum_{q=0}^{Q}\alpha_q(t)u_q(P)$

的解是 $$u(P,t)=\sum_{q=0}^{Q}\left[\left(\int_0^t\frac{\sin[a\sqrt{\lambda_q}(t-s)]}{a\sqrt{\lambda_q}}\alpha_q(s)ds\right)u_q(P)\right].\tag{18}$$

(当 $\lambda_q=0$ 时我们用到定理 5 中的约定.)

Green 函数

上述定理中的解形式上可重写成由 I.C. 中所给的函数或 D.E. 中非齐次项与问题一确定的核或 Green 函数的卷积, 它可经由特征函数来构造. 在下面的例子中我们来说明这种构造.

例 3 (齐次热问题的核) 形式上求热问题 (11) 解的积分公式.

解 在问题 (11) 的解 (12) 中, 用积分写出 $c_q = \langle f, u_q \rangle$(参看 (8) 和 (9)), 然后在以下的计算中交换求和与积分的次序

$$\begin{aligned} u(P,t) &= \sum_{q=0}^{Q} c_q e^{-\lambda_q \kappa t} u_q(P) = \sum_{q=0}^{Q} \int_M f(P') u_q(P') dM(P') e^{-\lambda_q \kappa t} u_q(P) \\ &= \int_M f(P') \big(\sum_{q=0}^{Q} e^{-\lambda_q \kappa t} u_q(P) u_q(P') \big) dM(P'). \end{aligned} \tag{19}$$

给定的 f 形式隐含对 $q > Q$, f 与 u_q 正交. 因此 (19) 中的 Q 可用任一更大的有限数替换. 简单地用 ∞ 来替换是令人感兴趣的, 但这不保证这个和也将是收敛的. 的确, 该级数当 $t = 0$ 和 $P = P'$ 时是不收敛的. 可以证明 (参看 [Chavel, 第六章和第七章]), 对 $t > 0$, 该级数确实收敛到集合 $\mathbf{R}^+ \times M \times M$ 上三元组 (t, P, P'), $t > 0$ 的 C^∞ 函数. 记该和为:

$$H(t, P, P') = \sum_{q=0}^{\infty} e^{-\lambda_q \kappa t} u_q(P) u_q(P'), \quad \text{对} \quad \mathbf{R}^+ \times M \times M \text{ 中的 } (t, P, P') \tag{20}$$

而且, 可以证明当初始温度 f 在 M 上是连续的且不必是特征函数的有限线性组合时, 我们有以下 $t > 0$ 的 D.E. 和 B.C. 的解 (参看 [Chavel, 第六章和第七章]):

$$u(P,t) = \int_M H(t, P, P') f(P') dM(P'), \quad t > 0, \tag{21}$$

和

$$\lim_{t \to 0^+} u(P,t) = f(P). \tag{22}$$

注记 函数 $H(t,P,P')$ 称为**热核**或M **上热方程的基本解**(对给定的 B.C.). $H(t,P,P')$ 的解释是它表示由在 $t=0$ 时集中在 P' 处的初始热源产生的在时刻 t 在 P 处的温度. 在下个例子后面的注记中, 我们将证明 $H(t,P,P')$ 还出现在非齐次热方程的问题 (15) 的解的积分公式中 (参看 (30)). □

例 4 (带源的热问题的 Green 函数) 用积分公式表示问题 (15) 的解 (16).

解 解 (16) 可写成以下形式

$$\begin{aligned} u(P,t) &= \sum_{q=0}^{Q} e^{-\lambda_q \kappa t} \int_0^t \alpha_q(s) e^{\lambda_q \kappa s} ds u_q(P) \\ &= \int_M \int_0^t \Big(\sum_{q=0}^{Q} e^{-\lambda_q \kappa (t-s)} u_q(P) u_q(P')\Big) \varphi ds dM(P'). \end{aligned} \tag{23}$$

取 $Q=\infty$, 形式定义

$$G(t,P;t',P') = \epsilon(t-t') \sum_{q=0}^{\infty} e^{-\lambda_q \kappa (t-t')} u_q(P) u_q(P'), \tag{24}$$

其中

$$\epsilon(s) = \begin{cases} 1, & s \geqslant 0, \\ 0, & s < 0. \end{cases} \tag{25}$$

问题 (15) 的解 (23) 可写成

$$u(P,t) = \int_M \int_0^\infty G(t,P;t'P') \varphi(P',t') dt' dM(P'). \quad \square \tag{26}$$

注记 $\mathbf{R}^+ \times M \times \mathbf{R}^+$ 上的函数 G 称为问题 (15) 的**Green 函数**. 如果把热算子 $\partial_t - \kappa \triangle_M$ 作用到 (26) 的两边, 并形式地在积分号下求导, 得到以下涉及 (15) 中的源项 $\varphi(P,t)$ 的方程:

$$\varphi(P,t) = u_t - \kappa \triangle_M u = \int_M \int_0^\infty (\partial_t - \kappa \triangle_M) G(t,P;t',P') \varphi(P',t') dM(P'). \tag{27}$$

括号内的表示式不会是一个通常的函数, 而是一个 “广义函数” 或称作在 (t,P) 处的 **Dirac delta** “分布” (参看第 7.4 节的 (33)), 它可不严格地定义为具有以

下性质的广义函数 $\delta(t,P;t',P')$:

$$\varphi(P,t)=\int_M\int_0^\infty \delta(t,P;t',P')\varphi(P',t')dt'dM(P'). \tag{28}$$

于是

$$(\partial_t-\kappa\triangle_M)[G(t,P;t',P')]=\delta(t,P;t',P'). \tag{29}$$

尽管我们不对可解释关系式 (29) 精确含义的分布理论进行深究, 然而可以说最终 (29) 表明由 (26) 的右边所定义的积分算子 $I(\varphi)$ 是微分算子 $\partial_t-\kappa\triangle_M$ 在满足 (15) 的 B.C. 和 I.C. 的充分光滑函数的集合上的逆. 直观上可把 $G(t,P;t',P')$ 看作由在 (P',t') 处的集中点源产生的在 (P,t) 处的温度. 回忆一下在例 3 后面的注记中关于 $H(t,P,P')$ 的解释, 我们应有 $H(t,P,P')=G(t,P;0,P')$, 验证上述的定义, 结果是这样. 更一般地, 有

$$G(t,P;t',P')=H(t-t',P,P'), \tag{30}$$

这表明由在时刻 t' 在 P' 处的源产生的在时刻 t 在 P 处的温度与 "初始温度" 相同, 如果时间是以 t' 作为起点度量的话. 因此, (30) 可认为是 Duhamel 原理的再形成.

对数值小的 t 和在内点 $M^0\equiv M-\partial M$ 中的 P 和 P', 我们期望 $H(t,P,P')$ 将逼近 $\mathbf{R}^k$ 的热核. 换句话说, 对小的 t, 有

$$H(t,P,P')\sim(4\pi\kappa t)^{-\frac{k}{2}}\exp\Big(-\frac{d(P,P')^2}{4\kappa t}\Big),\quad P,P' \text{ 在 } M^0 \text{ 内}, \tag{31}$$

其中 M^0 中的 P 和 P' 之间的距离 $d(P,P')$ 是小量. 局部上看, M^0 看起来像 $\mathbf{R}^k$. 因此 (31) 应该成立, 因为在 P 处, 由邻近 P' 处的源所起的作用, 在一个短小时间 t 之后逼近在 $\mathbf{R}^k$ 中的效用. 如果在关系式 (20) 中令 $P=P'$ 并对 $H(t,P,P')$ 关于 P 在 M 上积分, 则利用正交性 (参看 (8)), 得

$$\begin{aligned}\int_M H(t,P,P')dM(P)&=\sum_{q=0}^{\infty}e^{-\lambda_q\kappa t}\int_M u_q(P)^2dM(P)\\&=\sum_{q=0}^{\infty}e^{-\lambda_q\kappa t}\langle u_q,u_q\rangle=\sum_{q=0}^{\infty}e^{-\lambda_q\kappa t}.\end{aligned} \tag{32}$$

另一方面, (31) 在 M 上积分 (取 $P=P'$), 得

$$\int_M H(t,P,P')dM(P)\sim(4\pi\kappa t)^{-\frac{k}{2}}\mathrm{Vol}(M). \tag{33}$$

比较 (32) 和 (33), 我们得到

$$\sum_{q=0}^{\infty} e^{-\lambda_q \kappa t} \sim (4\pi\kappa t)^{-\frac{k}{2}} \mathrm{Vol}(M). \tag{34}$$

换言之, M 的体积可由 $\triangle_M$ 的特征值确定. 实际上由 Weyl 公式 (4) 我们已经知道这个结果. 的确, 不难证明 (4) 和 (34) 是等价的, 即可从一个直接推出另一个 (利用 [Feller, p.466] 中的 Karamata Tauberi 定理. 根据 M 的曲率或一般的形状, 存在 (34) 的精细的修正. 的确, 对无边紧致 2–流形 (即 ∂M 是空集) 的情形, 例如像可能是变形的球面, 有一些 (比如 h) 个洞 (例如, 带一个洞的圆环), 我们有更精确的估计 (参看 [Chavel,p.155])

$$\sum_{q=0}^{\infty} e^{-\lambda_q \kappa t} \sim \frac{\mathrm{Vol}(M)}{4\pi\kappa t} + \frac{1-h}{3}$$

或

$$h = 1 + 3 \lim_{t\to 0^+} \Big[\frac{\mathrm{Vol}(M)}{4\pi t} - \sum_{q=0}^{\infty} e^{-\lambda_q t}\Big]. \tag{35}$$

于是, 洞的个数可由特征值确定. 由于特征值可看作振动基本模式的频率平方的负值, 我们可以说一个振动的曲面的曲面面积和洞的个数可以 "听" 出来 (参看第 8.2 节的习题 2), 假设我们能听到任意高的频率的话. □

例 5 (波问题的 Green 函数) 求波问题 (17) 的 Green 函数, 并利用它求出初值问题 (13) 的解的积分公式.

解 如同例 4 中的热问题, 我们把解 (18) 写成

$$u(P,t) = \int_M \int_0^t \Big(\sum_{q=0}^{Q} \frac{\sin[a\sqrt{\lambda_q}(t-t')]}{a\sqrt{\lambda_q}} u_q(P) u_q(P')\Big) \varphi(P',t') dM(P'). \tag{36}$$

因此, 由形式取 $Q=\infty$, 我们得 Green 函数 (关于 ϵ 的定义参看 (25))

$$G(t,P;t',P') = \epsilon(t-t') \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\sin[a\sqrt{\lambda_q}(t-t')]}{a\sqrt{\lambda_q}} u_q(P) u_q(P'), \tag{37}$$

它 (在分布的意义下) 满足关系式

$$(\partial_{tt}-a^2\triangle_M)G(t,P,t',P')=\delta(t,P,t',P'), \tag{38}$$

于是 $G(t,P,t',P')$ 可认为由集中在 P' 处在时刻 t' 的某个干扰源产生的, 在 P 处在时刻 t 的振幅. 形式上允许 $Q=\infty$, 具齐次 D.E. 的初值问题 (13) 的解 (16) 可写成以下形式

$$\begin{aligned}&\int_M\Big[\Big(\sum_{q=0}^{\infty}\cos(a\sqrt{\lambda_q}t)u_q(P')\Big)f(P')+\Big(\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\sin(a\sqrt{\lambda_q}t)}{a\sqrt{\lambda_q}}u_q(P)u_q(P')\Big)g(P')\Big]dM(P')\\&=\int_M\big(-\partial_{t'}G(t,P;0,P')f(P')+G(t,P;0,P')g(P')\big)dM(P')\\&=\int_M\big(G(t,P;0,P')u_{t'}(P',0)-G_{t'}(t,P;0,P')u(P',0)\big)dM(P').\end{aligned} \tag{39}$$

因此, 初值问题 (13) 的解可优美地用 Green 函数表示. 的确, Green 函数 (37) 本质上是初始位置 $u(P,0)$ 为零初始速度分布图可以任意的波问题的核. 于是, Green 函数 $G(t,P;t',P')$ 可解释为由在 P' 处在时刻 t' 的集中速度源产生的在 P 处在时刻 t 的位移. □

例 6 (Poisson 核) 形式求以下 Poisson 问题解的积分公式

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad \triangle_M u(P)=h(P),\quad 于\ M\ 上;\\&\text{B.C.}\quad \begin{cases}u=0, & 于\ D\ 上,\\ \partial_\nu u=0, & 于\ N\ 上.\end{cases}\end{aligned} \tag{40}$$

解 D.E. 的两边与 u_q 取内积, 得

$$\langle h,u_q\rangle=\langle\triangle_M u,u_q\rangle=\langle u,\triangle_M u_q\rangle=-\langle u,\lambda_q u_q\rangle=-\lambda_q\langle u,u_q\rangle.$$

因此, 要使有解, 必须有

$$\langle h,u\rangle=0,\quad 如果\quad \lambda_q=0. \tag{41}$$

实际上只有在 $q=0$ 和 $u_0=常数\neq 0$ 的情形 λ_q 才会为零, 这出现在 B.C. 中的 D 是空集的时候 (即, 或是 B.C. 是纯 Neumann 条件, 或是 ∂M 是空集; 参看习题 11). 无论如何, 假设 (41) 满足的话, 我们得到以下形式解:

$$u(P)=\sum_{\lambda_q\neq 0}\langle u,u_q\rangle u_q(P)=\sum_{\lambda_q\neq 0}-\lambda_q^{-1}\langle h,u_q\rangle u_q(P)$$

$$= \int_M G(P,P')h(P')dM(P'), \tag{42}$$

其中**Poisson 核**$G(P,P')$ 由下面给出

$$G(P,P') \equiv \sum_{\lambda_q \neq 0} -\lambda_q^{-1} u_q(P) u_q(P'). \quad \square \tag{43}$$

例 7 (稳态热问题) 根据形式运算和 Green 公式 (7) 求以下稳态热问题的假定性解:

$$\text{D.E.} \quad \triangle_M u = 0, \quad 于 M 上;$$

$$\text{B.C.} \quad \begin{cases} u = f, & 于 D 上, \\ \partial_\nu u = g, & 于 N 上. \end{cases} \tag{44}$$

解 先考虑 $\lambda_0 \neq 0$ 的情形. 根据 (42), 形式上有

$$h(P) = \triangle_M \int_M G(P,P')h(P')dM(P') = \int_M \triangle_M G(P,P')h(P')dM(P'). \tag{45}$$

当 $h(P)$ 是问题 (44) 的一个解 (假设存在)u 时, 我们应用 (45)

$$\begin{aligned} u(P) &= \int_M \triangle_M G(P,P')u(P') - G(P,P')\triangle_M u(P')dM(P') \\ &= \int_{\partial M} \partial_\nu G(P,Q)u(Q) - G(P,Q)\partial_\nu u(Q)d\partial M(Q), \end{aligned} \tag{46}$$

或根据 B.C.,

$$u(P) = \int_{\partial M} \partial_\nu G(P,Q)f(Q) - G(P,Q)g(Q)d\partial M(Q). \tag{47}$$

因此, 在 $\lambda_0 \neq 0$ (即 D 是非空的) 的情形, (47) 提供了 (44) 的假定性解的一个积分公式. 特别, 如果 $D = \partial M$ 且 ∂M 是非空的, 我们注意到 $\partial_\nu G(P,Q)$ 充当了 M 上 Dirichlet 问题的假定性 Poisson 核. 经一些努力 (参看 [Cordes, p.82]), 可以证明 $G(P,P')$ 在 $M \times M$ 上除了 "对角线"$P = P'$ 是 C^∞ 函数. 而且由 (47) 定义的函数 u 在内点 M^0 上是调和的 (即在 M^0 上 $\triangle_M u = 0$), 且如果给定的边界函数 f 是连续的话, 则在边界上 u 可连续地延拓到 f. 现在我们来考虑 D 是空集的情形. 如果 ∂M 也是空集, 则没有边界条件要满足且任意常值函数将满足问题 (44)(参看习题 14). 如果 D 是空集而 ∂M 不是空集, 则 (44) 是 M 上的纯 Neumann 问题, 为了解存在, 有一个相容性条件必须成立. 的确, 利用 Green 公式, 我们有**相容性条件**(参看第 6.1~6.7 节):

$$0 = \int_M 1\triangle_M u - u\triangle_M 1 dM = \int_{\partial M} 1\partial_\nu u - u\partial_\nu 1 d\partial M$$

$$= \int_{\partial M} \partial_\nu u d\partial M = \int_{\partial M} g d\partial M, \tag{48}$$

即, 从物理上看, 为使稳态温度分布存在, 在边界上净指定温度流必等于零. 现假设 u 是 (44) 的解. 则从 u 减去平均 $\bar{u} \equiv \mathrm{Vol}(M)^{-1} \int_M u dM$, 我们得到满足 (48) 的函数 $u - \bar{u}$(即 $\langle u - \bar{u}, u_0 \rangle = 0$). 从而对 $f = u - \bar{u}$ 应用 (47), 得

$$u(P) - \bar{u} = \int_{\partial M} -G(P, Q) g(Q) d\partial M(Q). \tag{49}$$

显然, 一个 Neumann 问题的任意解加上一个常数得到另一个解, 由此我们有下面的纯 Neumann 问题的形式通解

$$u(P) = \int_{\partial M} -G(P, Q) g(Q) d\partial M(Q) + c, \tag{50}$$

其中 c 是任意常数, 只要相容性条件 (48) 满足. □

概要 8.6

1. 流形: 虽然给出了流形的严格定义, 然而直观说来 $\mathbf{R}^n$ 中一 k-流形 ($k \leqslant n$) 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个光滑 k 维子集, 设为 M, 它可以有一光滑 $k-1$ 维边界 ∂M.

2. Laplace 算子 $\triangle_M$: 定义在 $\mathbf{R}^n$ 中的一 k-流形 M 上的函数是 C^2 的, 如果它能沿着 (M 的) 法线方向常值延拓成定义在 ($\mathbf{R}^n$ 的) 一个开子集 A 上的 C^2 函数 $\bar{f}$, A 本质上是把 M"变厚" 使其成为一个 n 维的物体. 则 M 上 C^2 函数 f 的 Laplace 算子 $\triangle_M$ 由以下定义: 对 M 中所有的点 P, $\triangle_M f(P) = \triangle \bar{f}(P)$, 其中 $\triangle = \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_n}^2$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的 Laplace 算子. 则我们可考虑 M 上标准热方程 ($u_t = k\triangle_M u$) 和标准波方程 ($u_{tt} = a^2 \triangle_M u$), 满足初始条件和某种标准边界条件, 比如

$$\text{B.C.} \quad \begin{cases} u = 0, & \text{于 } D \text{ 上} \\ \partial_\nu u = 0, & \text{于 } N \text{ 上}, \end{cases} \tag{S1}$$

其中 $\partial_\nu u$ 是 u 在 ∂M 上的点的外法向导数, N 是 ∂M 与 $\mathbf{R}^n$ 的某个开子集的交集, $D \equiv \partial M - N$, 是 ∂M 中但不是 N 中的点的集合.

3. $\triangle_M$ 的特征函数和特征值: 在求解 $\mathbf{R}^n$ 中 k-流形 M 上的热问题和波问题中头等重要的是确定 $\triangle_M$ 满足 B.C.(S1) 的特征函数. 我们限于紧致 M(即,

M 是 $\mathbf{R}^n$ 中的闭有界子集). 在这种情形, 存在 $\triangle_M$ 满足 B.C.(S1) 的实值特征函数列 $u_0, u_1, u_2, \cdots$, 以及相应的特征值 $0 \leqslant \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$, 满足

$$\triangle_M u_0 = -\lambda_0 u_0, \quad \triangle_M u_1 = -\lambda_1 u_1, \quad \triangle_M u_2 = -\lambda_2 u_2, \cdots$$

其中 (S2)

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad i, j = 0, 1, 2, \cdots.$$

这里 $\langle f, g \rangle \equiv \int_M f\bar{g}dM$ 表示 M 上函数的内积. 其中每个特征值重复的次数等于它的特征空间的维数. 具有不同的特征值的特征函数是正交的事实是 Green 公式:

$$\langle \triangle_M f, g \rangle - \langle f, \triangle_M g \rangle = \int_{\partial M} g(Q)\partial_\nu f(Q) - f(Q)\partial_\nu g(Q) d\partial M(Q)$$

的直接推论.

4. 特征函数展开: 令 f 是 M 上的函数, 使得对 (S2) 中所有的函数 $u_q(\ q = 0, 1, 2, \cdots)$, 积分 $\langle f, u_q \rangle$ 存在. 则

$$\mathrm{E}\ f(P) \equiv \sum_{q=0}^{\infty} c_q u_q(P), \quad \text{其中} \quad c_q = \|u_q\|^{-2} \langle f, u_q \rangle = \langle f, u_q \rangle. \tag{S3}$$

如果 f 是 C^m, $m > k/2$ (其中 k 是 M 的维数), 并且满足 B.C.(S1), 则 $\mathrm{E}\ f$ 一致收敛到 f(参看定理 3).

5. 流形上的热问题和波问题: 当初始函数是有限特征函数展开的实用情形时, 比如在实验误差之内展开时 (参看定理 4 和定理 5), 给出了一紧致 k–流形 M 上具 B.C.(S1) 的热方程和波方程的初值问题的解. 当源项是具依赖时间系数的有限特征函数时, 定理 6 和定理 7 提供了对具 B.C.(S1) 的非齐次热方程和波方程的解.

6. Green 函数: 具 B.C.(S1) 的非齐次热方程, 波方程和 Poisson 方程的解可用积分公式表示, 其中非齐次项与所给问题的 Green 函数卷积. 在每种情形, Green 函数都是由 (S2) 中的特征函数 u_q 和特征值 λ_q 构造. 详情见例 3 至例 7.

7. Wely 公式: 对大的 q, 一紧致和连通的 k–流形的特征值 λ_q 的性质受到维数 k 和它的 k 维体积 [Vol(M)] 的影响. 这由以下公式是明显的

$$\text{Weyl 公式：}\quad \lambda_q \sim 4\pi^2\left(\frac{q}{\omega_k \mathrm{Vol}(M)}\right)^{\frac{2}{k}},\quad q\to\infty, \tag{S4}$$

或等价地

$$\sum_{q=0}^{\infty} e^{-\kappa\lambda_q t} \sim (4\pi\kappa t)^{-\frac{k}{2}}\mathrm{Vol}(M),\quad t\to 0^+. \tag{S5}$$

公式 (S5) 的细化表明 $\mathbf{R}^n$ 中的 k–流形的某种几何 (或 “拓扑”) 性质也可由对大的 q 的特征值 λ_q 的行为来确定. 例如, 一无边紧致曲面 (2–流形) 的洞的个数 h 由以下确定

$$\sum_{q=0}^{\infty} e^{-\kappa\lambda_q t} \sim \frac{\mathrm{Vol}(M)}{4\pi\kappa t}+\frac{1-h}{3}\quad\text{或}\quad h=1+3\lim_{t\to 0^+}\left[\frac{\mathrm{Vol}(M)}{4\pi t}-\sum_{q=0}^{\infty} e^{-\lambda_q t}\right].$$

练习 8.6

1. 通过证明例 1 中的映射 F, 对 C 中每点 P 是 B 中某个点 P' 的 $F(P')$, 且 $G(F(P'))=P'$, 现来证明 F 是集合 B 和 C 之间的微分同胚.

2. (a) 设 $f(x,y)$ 是对 xy–平面上所有的 (x,y) 有定义的 C^∞ 函数. 求 $\mathbf{R}^3$ 到 $\mathbf{R}^3$ 上的微分同胚, 使得 xy–平面映到 $f(x,y)$ 的图像上.

(b) (a) 中的微分同胚如何用来证明 $f(x,y)$ 在区域 $x-y\geqslant 0$ 上的图像是 $\mathbf{R}^3$ 中的边界是由形如 $(x,x,f(x,x))$ 的点组成的 2–流形.

提示 需要通过空间的旋转来修改 (a) 中的微分同胚.

3. 证明圆周 $x^2+y^2=1$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的无边 1–流形.

4. 证明正方形 $|x|+|y|=1$ 不是 $\mathbf{R}^2$ 中的 (光滑)1–流形.

提示 证明经微分同胚一条线段不可能映成一 “角点”.

5. 验证 Weyl 公式在以下情形的有效性

(a) 半径为 r 的圆周　　(b) 半径为 ρ 的球面　　(c) $L\times M$ 矩形.

提示 关键是回忆起每个特征值重复的次数等于相应的特征空间的维数.

6. 通过直接代入验证定理 4 和定理 5 中的函数 u 确实满足 D.E., B.C. 和 I.C..

7. 对定理 6 和定理 7 做习题 6.

8. 对具带边界 ∂M 的紧致流形, 把下面问题转化成具齐次 B.C. 问题.

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_t = \kappa \triangle_M u, \quad \text{于 } M \text{ 上}, \quad t > 0;\\
&\text{B.C.}\quad u(Q,t) = f(Q,t), \quad \text{对 } \partial M \text{ 上所有的 } Q,\ t > 0;\\
&\text{I.C.}\quad u(P,0) = 0, \qquad \text{对 } \partial M \text{ 上所有的 } P.
\end{aligned}$$

相应的 "齐次问题" 怎样可形式求解?

提示 为获得一个满足 B.C. 的特别函数, 对每个 $t > 0$ 求解满足所给 B.C. 的 Dirichlet 问题的解.

9. 假设习题 8 中的 B.C. 换成 $\partial_\nu u(Q,t) = f(Q,t)$. 在通过对每个 t 求解 Neumann 问题来找满足 B.C. 的函数会有什么困难? 先通过对每个 t 求解 Poisson D.E. $\triangle w = c(t)$, $c(t) \equiv \mathrm{Vol}(M)^{-1} \int_{\partial M} f(Q,t) d\partial M(Q)$ 这种困难怎样会被克服?

提示 作为 Green 公式的一个特殊情形, 利用

$$\int_M \triangle_M w(P) dM(P) = \int_{\partial M} \partial_\nu w(Q) d\partial M(Q),$$

然后考虑关于 $v = u - w$ 的相应问题.

10. $\mathbf{R}^n$ 中一紧致 k–流形 M 上的向量场把 M 中的每点 P 赋予与 M 相切的向量 $\mathbf{V}(P)$. 令 $\overline{\mathbf{V}}$ 是 $\mathbf{V}$ 在 M 在 $\mathbf{R}^n$ 中一个开子集 A 上的延拓, 它是通过沿着 M 的法线平移 $\mathbf{V}$ 获得. 定义 $\mathbf{V}$ 在 P 处的**散度**(记作 $\mathrm{div}(\mathbf{V})$) 为 $\overline{\mathbf{V}}$ 在 P 处的散度, 即, $\nabla \cdot \overline{\mathbf{V}} \equiv \partial \overline{\mathbf{V}}_1/\partial x_1 + \cdots + \partial \overline{\mathbf{V}}_n/\partial x_n$(在 P 处), 其中 $\overline{\mathbf{V}}_i$ 是 $\overline{\mathbf{V}}$ 第 i 个分量. 紧致 k–流形 M 的 **Gauss散度定理**表明对 M 上任意 C^1 向量 $\mathbf{V}$, 有

$$\int_M \mathrm{div}(\mathbf{V}) dM = \int_{\partial M} \mathbf{V}(Q) \cdot \mathbf{n}(Q) d\partial M(Q),$$

其中 $\mathbf{n}(Q)$ 是在 ∂M 上的点 Q 处的 ∂M 的外法向, 且如果 ∂M 是空集, 右端定义为零.

(a) 证明对 M 上的 C^2 函数 f, 有 $\triangle_M f = \mathrm{div}(\nabla f)$, 其中 ∇f 是 M 上的向量场, 定义为 $\nabla f \equiv \nabla \bar{f} = (\bar{f}_{x_1}, \cdots, \bar{f}_{x_n})$, 其中 $\bar{f}$ 是 f 的延拓, 它在 M 的法线上取常值. (一般在 M 上 $\nabla \bar{f}$ 与 $\overline{\nabla f}$ 之间有区别. 不过有能力的学生应该证明在 M 上 $\nabla \cdot \nabla \bar{f} = \nabla \cdot \overline{\nabla f}$.)

(b) 对 M 上的 C^2 函数 f 和 g, 证明 $\mathrm{div}(f\nabla g) = f\triangle_M g + \nabla f \cdot \nabla g$, 并推导 $f\triangle_M g - g\triangle_M f = \mathrm{div}(f\nabla g - g\nabla f)$.

(c) 由 (a) 和 (b) 部分以及 Gauss 散度定理, 推导 Green 公式 (7):

$$\langle \triangle f, g\rangle - \langle f, \triangle g\rangle = \int_{\partial M} g(Q)\partial_\nu f(Q) - f(Q)\partial_\nu g(Q) d\partial M(Q).$$

11. 设 M 是带边或不带边的紧致 k–流形.

(a) 利用习题 (10) 证明: 对任意 C^1 函数 v 和任意 C^2 函数 w, 有

$$\int_M v\triangle_M w dM = -\int_M \nabla v\cdot\nabla w dM + \int_{\partial M} v\partial_\nu w d\partial M.$$

(b) 利用 (a) 部分证明 $\triangle_M$ 满足标准 B.C.($u=0$ 于 $D\subset\partial M$ 上和 $\partial_\nu u=0$ 于 $N\subset\partial M$ 上(参看定理 1)) 的特征值 λ_n 是非负的, 且仅在 $N=\partial M$ 的情形 (即,B.C. 是纯 Neumann 问题或 ∂M 是空集)$\lambda_0=0$.

(c) 由 (b) 部分得出例 6 中的 Poisson 问题对所有 "好" 函数 h, 在 D 不是空集的情形下 (即, 条件 (41) 则是无意义的) 至少是形式可解的.

12. 证明热方程最大值原理的通常的证明 (参看第 3.2 节的末尾) 对空间区域是 $\mathbf{R}^n$ 中的紧致 k–流形 M 的情形时仍然是有效的.

13. 假设存在带边 ∂M 的紧致流形 M 上的 C^2 函数 v, 满足 $\triangle_M v=1$(或更一般地, $\triangle_M v>0$), 对 M^0 上的能连续地延拓到 ∂M 上的调和函数 u(即, 在 M 的内点 M^0 上 $\triangle_M u=0$) 证明最大值原理 (参看第 6.4 节的定理 1).(注意到当 ∂M 不是空集的情形下这样的函数 v 的存在性由习题 11 的 (c) 部分似乎是可能的.)

提示 对充分小的 $\epsilon>0$, 考虑在 $u+\epsilon v$ 的最大值点处的 Laplace 算式.

14. 假设 M 是无边紧致 k–流形. 利用 Green 公式证明在 M 上不存在 C^2 函数 v, 使得 $\triangle_M v\geqslant 0$, 除非 v 是常数.

15. 令 M 是带边或不带边的紧致 k–流形.

(a) 利用习题 11 的 (a) 部分证明: 对定理 4 中热问题 (11) 的任一 C^2 解 u①, 必有

$$\frac{d}{dt}\int_M u(P,t)^2 dM(P)\leqslant -2\kappa\int_M \|\nabla u\|^2 dM.$$

(b) 利用 (a) 部分的这个事实来证明热问题 (11) 的 C^2 解的唯一性.

16. 设 u 是 $\mathbf{R}^n$ 中紧致流形 M 上波方程 $u_{tt}=a^2\triangle_M u$ 的解. 考虑能量积分 (参看第 5.1 节的 (12))

$$H(t)=\frac{1}{2}\int_M u_t^2+a^2\|\nabla u\|^2 dM.$$

(a) 证明

$$\begin{aligned}H'(t) &= a^2\int_M u_t\triangle_M u+\nabla u_t\cdot\nabla u dM = a^2\int_M \mathrm{div}(u_t\nabla u)dM\\ &= a^2\int_{\partial M} u_t\nabla u\cdot\mathbf{n}d\partial M\end{aligned}$$

① 原书遗漏了 u.——译者

(参看习题 10 的 (b) 部分).

(b) 利用 (a) 部分证明以下波问题的唯一性定理:

$$\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2\triangle_M u,\quad \text{于 } M \text{ 上},\quad -\infty<t<\infty;$$
$$\text{B.C.}\quad \begin{cases} u=0, & \text{于 } D \text{ 上},\\ \partial\nu u=0, & \text{于 } N \text{ 上};\end{cases}$$
$$\text{I.C.}\quad u(P,0)=f(P),\quad u_t(P,0)=g(P),\quad \text{对 } M \text{ 上所有的 } P.$$

17. 证明最多存在一个 C^∞ 函数 $H(t,P,P')$(对 $t>0$), 使得问题

$$\text{D.E.}\quad u_t=\triangle_M u,\quad \text{于 (紧致流形)} M \text{ 上};$$
$$\text{B.C.}\quad \begin{cases} u=0, & \text{于 } D \text{ 上},\\ \partial\nu u=0, & \text{于 } N \text{ 上};\end{cases}$$
$$\text{I.C.}\quad u(P,0)=f(P)$$

(参看 (15)) 对每一初始 C^∞ 温度 $f(P)$ 有解

$$u(P,t)=\int_M H(t,P,P')f(P')dM(P'),$$

(即, 热核是唯一的).

提示 对固定的 t 和 P, 为求出 $H(t,P,P')$ 作为 P' 的函数的特征函数展开, 令 $f(P)=u_n(P)$, $n=0,1,2,\cdots$, 并利用解的唯一性 (参看习题 15).

18. 如果 f 是定义在 $[-\pi,\pi]$ 上且具有 C^∞ 的周期延拓 $\bar{f}$, 则

$$\text{D.E.}\quad u_t=u_{xx},\quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi,\ t>0;$$
$$\text{B.C.}\quad u(-\pi,t)=u(\pi,t),\quad u_x(-\pi,t)=u_x(\pi,t);$$
$$\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x)$$

的解 (参看第 7.5 节) 由以下给出

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4t)}\bar{f}(y)dy.$$

(a) 证明 (至少是形式上)

$$u(x,t)=\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-(x-z-2m\pi)^2/(4t)}\Big)f(z)dz.$$

(b) 由 (a) 和习题 17 推导 (参看第 7.2 节的习题 20)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-m^2t}e^{im(x-z)}=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-(x-z-2m\pi)^2/(4t)}.$$

19. 利用练习 6.4 的习题 11—13, 第 8.5 节的例 1 和 (42) 形式证明, 对 $re^{i\theta} \neq r'e^{i\theta'}$, $r<1$ 和 $r'<1$,

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} -\frac{1}{\beta_{m,k}^2 J_m'(\beta_{m,k})^2} J_m(r\beta_{m,k})J_m(r'\beta_{m,k})e^{im(\theta-\theta')}$$

$$=\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{1-rr'e^{i(\theta-\theta')}}{re^{i\theta}-r'e^{i\theta'}}\right|.$$

20. 对 $\mathbf{r}=(x,y,z)$ 和 $\mathbf{r}'=(x',y',z')$, 本题证明

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad \triangle u = h,\quad \rho^2=x^2+y^2+z^2\leqslant 1;\\&\text{B.C.}\quad u(x,y,z)=0,\quad \rho=1\end{aligned}\tag{$*$}$$

的 Green 函数可写成以下形式:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=-\frac{1}{4\pi}\Big(\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}-\frac{(\rho')^{-1}}{\|\mathbf{r}-(\rho')^{-2}\mathbf{r}'\|}\Big),\tag{$**$}$$

其中 $\rho'\equiv\|\mathbf{r}'\|$.

(a) 证明

$$\frac{(\rho')^{-1}}{\|\mathbf{r}-(\rho')^{-2}\mathbf{r}'\|}=\frac{\rho^{-1}}{\|\mathbf{r}'-\rho^{-2}\mathbf{r}\|},$$

且当 $\rho=1$ 时 $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=0$.

提示 验证 $(\rho')^2\|\mathbf{r}-(\rho')^{-2}\mathbf{r}'\|^2=\rho^2(\rho')^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'+1$.

(b) 如果 $(*)$ 中的 h 在空间上是 C^2 的, 且在某个球外等于零, 证明

$$u(\mathbf{r})=\int_{\rho'\leqslant 1}G(\mathbf{r},\mathbf{r}')h(\mathbf{r}')dx'dy'dz'$$

满足问题 $(*)$. 可以利用 (a) 部分以及为形式验证 B.C., 在积分号下取极限 $\rho\to 1$.

提示 注意到如果 $\rho'<1$, 则 $(**)$ 中 $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ 的第二项在球 $\rho<1$ 内是 $\mathbf{r}$ 的调和函数, 然而第一项在 $\mathbf{r}=\mathbf{r}'$ 有奇异性. 因此, 只有 $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ 的第一项对 $\triangle u(\mathbf{r})$ 有影响. 为计算 $\triangle u(\mathbf{r})$, 利用 $x'y'z'$–空间的球坐标, 以 $\mathbf{r}$ 作为原点. 计算与第 6.4 节的习题 9 中所进行的类似.

21. 如同在习题 19 二维单位圆盘的情形所做的, 用球 Bessel 函数和球面调和函数表示习题 (20) 中的 Green 函数.

附录 1 分类定理

本附录证明 (关于两个变量的未知函数) 任意具常系数二阶线性偏微 (即, 下面的形式 (1)) 经变量变换可转化成四个标准类型之一, 即广义波方程, 或广义 Poisson 方程, 或广义热方程或标准退化方程, 分别取决于原先偏微是双曲的, 椭圆的, 抛物的或退化的 (参看第 1.3 节). 因此, 分类定理把对 (1) 的研究转化成对四种标准类型的研究, 通过反转变量变换 (2), 相应的标准偏微的解可变换回原偏微 (1) 的解. 我们特别关注导出区分抛物情形和退化情形的量, 即 $2cd - be$ 和 $2ae - bd$, 因这些量在文献中通常不讨论.

分类定理的证明背后的思想来源于解析几何, 在解析几何中为了把二次方程

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$$

化成双曲线方程的标准形式 (或一对交于一点的直线), 椭圆方程的标准形式 (或一点或空集), 抛物线方程的标准形式或一对 (可能重合) 平行直线方程的标准形式, 我们利用了坐标旋转和平移. 证明中的关键一步是: 在坐标旋转下**判别式** $b^2 - 4ac$ 是不变的 (即没有改变).

定理 1 (分类定理) 考虑二阶线性偏微

$$aU_{\xi\xi}+bU_{\xi\tau}+cU_{\tau\tau}+dU_{\xi}+eU_{\tau}+kU=F(\xi,\tau)\quad(a^2+b^2+c^2\neq 0),\tag{1}$$

其中未知函数 $U=U(\xi,\tau)$ 是 C^2 的, a,b,c,d,e 和 k 是给定的实常数, $F(\xi,\tau)$ 是给定的连续函数. 则存在以下形式的变量变换

$$\begin{cases}x=\alpha\xi+\beta\tau,\\ t=-\beta\xi+\alpha\tau,\\ u(x,t)=\frac{1}{\rho}\exp(\gamma\xi+\delta\tau)U(\xi,\tau),\end{cases}\tag{2}$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 和 $\rho(\rho\neq 0)$ 都是实常数, $\alpha^2+\beta^2=1$, 使得 (1) 正好变换成以下形式之一 (其中 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{K}$ 是实常数, $\mathbf{A}>0$):

(i) $-\mathbf{A}^2u_{xx}+u_{tt}+\mathbf{K}u=f(x,t),$ (3)

如果 $b^2-4ac>0$ (双曲情形);

(ii) $\mathbf{A}^2u_{xx}+u_{tt}+\mathbf{K}u=f(x,t),$ (4)

如果 $b^2-4ac<0$ (椭圆情形);

(iii) $\mathbf{A}^2u_{xx}+u_{t}+\mathbf{K}u=f(x,t),$ (5)

如果 $b^2-4ac=0$, 且 $2cd\neq be$ 或 $2ae\neq bd$ (抛物情形);

(iv) $u_{xx}+\mathbf{K}u=f(x,t),$ (6)

如果 $b^2-4ac=0$, 且 $2cd=be$ 和 $2ae=bd$ (退化情形), 其中 $f(x,t)=\exp[\gamma\xi+\delta\tau]F(\xi,\tau)$, $\xi=\alpha x-\beta t$ 和 $\tau=\beta x+\alpha t$.

证明 我们的做法是把 (1) 的左边用 u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, u_x, u_t 和 u 来表示, 然后选择常数 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 和 ρ, 使得左边变成 (在以 $\exp[\gamma\xi+\delta\tau]$ 相乘之后) 所期望的形式之一. 由这种论证, 对给定的方程 (1), 显然只有形式 (3)—(6) 的其中一种能够达到. 记

$$U(\xi,\tau)=\rho e^{\eta}u(x,t),\quad 其中\quad \eta\equiv-(\gamma\xi+\delta\tau).$$

则

$$U_{\xi}=\rho\big(e^{\eta}\eta_{\xi}u+e^{\eta}\eta(u_xx_{\xi}+u_tt_{\xi})\big)=\rho e^{\eta}(\alpha u_x-\beta u_t-\gamma u),$$

和

$$\begin{aligned}U_{\xi\xi} &= \rho e^{\eta}\eta_{\xi}(\alpha u_x - \beta u_t - \gamma u)\\ &\quad+\rho e^{\eta}\big(\alpha(u_{xx}x_{\xi} + u_{xt}t_{\xi}) - \beta(u_{tx}x_{\xi} + u_{tt}t_{\xi}) - \gamma(u_x x_{\xi} + u_t t_{\xi})\big)\\ &= \rho e^{\eta}\big(\alpha^2 u_{xx} - 2\alpha\beta u_{xt} + \beta^2 u_{tt} - 2\alpha\gamma u_x + 2\beta\gamma u_t + \gamma^2 u\big).\end{aligned}$$

类似地,

$$U_{\tau} = \rho e^{\eta}(\beta u_x + \alpha u_t - \delta u)$$

和

$$U_{\tau\tau} = \rho e^{\eta}\big(\beta^2 u_{xx} + 2\alpha\beta u_{xt} + \alpha^2 u_{tt} - 2\beta\delta u_x - 2\alpha\delta u_t + \delta^2 u\big).$$

而且,

$$U_{\xi\tau} = \rho e^{\eta}\big(\alpha\beta u_{xx} + (\alpha^2 - \beta^2)u_{xt} - \alpha\beta u_{tt} - (\alpha\delta + \beta\gamma)u_x + (\beta\delta - \gamma\alpha)u_t + \delta\gamma u\big).$$

把上述表达式代入 (1), 得

$$\rho e^{\eta}(Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + Ku) = F(\xi, \tau), \tag{7}$$

其中

$$A = a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2, \tag{8}$$

$$B = 2(c - a)\alpha\beta + b(\alpha^2 - \beta^2), \tag{9}$$

$$C = a\beta^2 - b\alpha\beta + c\alpha^2, \tag{10}$$

$$D = -a2\alpha\gamma - b(\gamma\beta + \delta\alpha) - c2\beta\delta + d\alpha + e\beta, \tag{11}$$

$$E = a2\beta\gamma + b(\beta\delta - \alpha\gamma) - c2\alpha\delta - d\beta + e\alpha, \tag{12}$$

$$K = a\gamma^2 + b\delta\gamma + c\delta^2 - d\gamma - e\delta + k. \tag{13}$$

利用假设 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, 计算表明 $B^2 - 4AC = (b^2 - 4ac)(\alpha^2 + \beta^2) = (b^2 - 4ac)$(即判别式是不变的). 可选 α 和 β, 使得 $B = 0$. 的确, 因 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, 故存在角度 θ 使得 $\alpha = \cos\theta$ 和 $\beta = \sin\theta$. 因此 $\alpha^2 - \beta^2 = \cos(2\theta)$ 和 $2\alpha\beta = \sin(2\theta)$, 为使 $B = 0$, 我们只需选取 θ, 使得单位向量 $(\cos(2\theta), \sin(2\theta))$ 与向量 $(b, a - c)$ 正交. 于是有 $-4AC = B^2 - 4AC = b^2 - 4ac$. 考虑 $b^2 - 4ac$ 是正的, 负的或等于零的情形.

情形 1 $(-4AC = b^2 - 4ac > 0)$ 这时 A 和 C 必不为零且符号相反. 取 $\rho = C^{-1}$. 则以 e^η 除 (21), 得到形式 (3) (其中 $\mathrm{A}^2 = -A/C > 0$ 和 $\mathrm{K} = K/C$), 只要能证明可以选取 γ 和 δ, 使得 $D = 0$ 和 $E = 0$, 或换言之 (参看 (11) 和 (12)),

$$\begin{cases}(2a\alpha + b\beta)\gamma + (2c\beta + b\alpha)\delta = d\alpha + e\beta \\ (2a\beta - b\alpha)\gamma + (b\beta - 2c\alpha)\delta = d\beta - e\alpha.\end{cases} \tag{14}$$

如果系数矩阵的行列式不为零我们可从该方程组解出 γ 和 δ. 然而, 利用事实 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, 有

$$\begin{vmatrix} 2a\alpha + b\beta & 2c\beta + b\alpha \\ 2a\beta - b\alpha & b\beta - 2c\alpha \end{vmatrix} = b^2 - 4ac. \tag{15}$$

因此, 在这种情形可 (唯一) 选取 γ 和 δ, 使得 $D = E = 0$:

$$\gamma = \frac{1}{b^2 - 4ac}\begin{vmatrix} d\alpha + e\beta & 2c\beta + b\alpha \\ d\beta - e\alpha & b\beta - 2c\alpha \end{vmatrix} = \frac{be - 2cd}{b^2 - 4ac}$$

和 (16)

$$\delta = \frac{1}{b^2 - 4ac}\begin{vmatrix} 2a\alpha + b\beta & d\alpha + e\beta \\ 2a\beta - b\alpha & d\beta - e\alpha \end{vmatrix} = \frac{bd - 2ae}{b^2 - 4ac}.$$

情形 2 $(-4AC = b^2 - 4ac < 0)$ 这时 A 和 C 同号. 因 $b^2 - 4ac \neq 0$, 故如同 (16) 可选常数 γ 和 δ, 使得 $D = E = 0$. 取 $\rho = C^{-1}$, 用 e^η 除 (7), 由此得形式 (4).

情形 3 $(-4AC = b^2 - 4ac = 0)$ 这时必有 $A = 0$ 或 $C = 0$. 注意到 A 和 C 不能同时为零. 的确, 根据方程 (8) 和 (10), 有 $0 = A + C = (a + c)(\alpha^2 + \beta^2)$. 则由 $a = -c$, 得 $0 = b^2 - 4ac = b^2 + 4a^2 = b^2 + 2a^2 + 2c^2$ 或 $a = b = c = 0$, 这与方程 (1) 是二阶的假设矛盾. 注意到如果在公式 (8),(9) 和 (10) 中以 β 替换 α 和以 $-\alpha$ 替换 β, 则 B 变成 $-B$(即, 如果 $B = 0$, 则它仍是 0),A 变成 C 以及 C 变成 A. 因此, 在此时的情形, 如果必要, 可改变 α 和 β 的值, 使得 $A \neq 0$ 和 $C = 0$, 同时 $B = 0$. 因 $b^2 - 4ac = 0$, 故不再保证方程组 (14) 可同时解出 γ 和 δ, 使得有 $D = 0$ 和 $E = 0$. 然而, 在 (14) 的第一个方程中, 如果

$$2a\alpha + b\beta \neq 0 \quad 或 \quad 2c\beta + b\alpha \neq 0, \tag{17}$$

则我们至少可选 γ 和 δ 的值, 使得这第一个方程成立 (即 $D = 0$). 为证明 (17) 成立, 我们注意到如果 $2a\alpha + b\beta = 0$ 和 $2c\beta + b\alpha = 0$, 则得到矛盾 $A = 0$. 的确,

由 (8),

$$2A = 2a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + 2c\beta^2 = \alpha(2a\alpha + b\beta) + \beta(2c\beta + b\alpha).$$

因此, 可求得 γ 和 δ , 使得 $D=0$. 因行列式 (15) 在此时为零, 故方程组 (14) 的解 (γ,δ) 存在当且仅当 (16) 中的分子都为零, 即

$$be = 2cd \quad 和 \quad bd = 2ae. \tag{18}$$

因此, 可以选取 γ 和 δ, 使得 $D=E=0$ 当且仅当关系式 (18) 都成立. 在这种情形, 通过取 $\rho = A^{-1}$ 并以 e^{η} 除 (7), 得到形式 (6). 如果 (18) 中一个或两个关系式不成立, 我们仍然能选取 γ 和 δ, 使得 $D=0$. 还能保证 A 和 E 同号. 的确, 注意到如果以 $-\alpha$ 替换 α 和以 $-\beta$ 替换 β, 则 (12) 表明 E 变成 $-E$, 而根据 (8) A 保持不变 (还注意到 B, C 和 D 保持为 0). 则为得到具 $\mathrm{A}^2 = A/E$ 的形式 (5), 取 $\rho = E^{-1}$. □

注记　如果偏微 (1) 的系数允许是 ξ 和 τ 的函数, 则方程的类型可能变化. 例如, 偏微 $U_{\xi\xi} - \xi U_{\tau\tau} = 0$ 有判别式 $b^2 - 4ac = 4\xi$. 因此, 该偏微对 $\xi > 0$ 是双曲的, 对 $\xi < 0$ 是椭圆的, 以及对 $\xi = 0$ 是抛物的. □



附录 2 Fubini 定理

在本书中, 为在积分号下求导是有效的, 我们经常提到 Leibniz 法则, 且为了交换多重积分的积分次序我们不时利用 Fubini 定理 (以意大利数学家 Guido Fubini(1879—1943) 命名, 他大约在 1910 年证明了该结果). 因 Fubini 定理在概念上似乎比 Leibniz 法则简单, 故我们先论及 Fubini 定理. 为说明交换积分次序时需要小心, 我们考虑一些例子.

例 1 令

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{如果 } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{如果 } (x,y)=(0,0).\end{cases} \tag{1}$$

证明

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dydx \neq \int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy. \tag{2}$$

(2) 的左边是

$$\int_0^1\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^{y=1}dx=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}.$$

然而, (2) 的右边是

$$\int_0^1\left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right]_{x=0}^{x=1}dy=\int_0^1\frac{-1}{y^2+1}dy=-\arctan(1)=-\frac{\pi}{4}.$$

实际上, 由事实 $f(y,x)=-f(x,y)$, 我们可得出 (2) 的两边有相反符号, 所以证明一边非零就足够了. □

例 2 令 $f(x,y)=(2xy-x^2y^2)e^{-xy}$. 该函数在整个 xy–平面上是 C^∞, 然而我们将证明

$$\int_0^1\int_0^\infty f(x,y)dydx \neq \int_0^\infty\int_0^1 f(x,y)dxdy. \tag{3}$$

对 $x>0$, 有

$$\int_0^\infty f(x,y)dy=\lim_{R\to\infty}\int_0^R(2xy-x^2y^2)e^{-xy}dy=\lim_{R\to\infty}\left[xy^2e^{-xy}\right]_{y=0}^{y=R}=0.$$

因 $f(0,y)=0$, 故当 $x=0$ 时也得到同样的结果. 因此, (3) 的左边是 0. 然而, (3) 的右边是

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_0^1(2xy-x^2y^2)e^{-xy}dxdy &= \int_0^\infty\left[x^2ye^{-xy}\right]_{x=0}^{x=1}dy\\ &=\int_0^\infty ye^{-y}dy=\lim_{R\to\infty}\left[-e^{-y}-ye^{-y}\right]_{y=0}^{y=R}=1.\end{aligned}$$ □

虽然这些例子表明一般积分次序会很重要, 然而 Fubini 定理的以下形式给出了不改变结果积分次序可交换的准则. 这不是 Fubini 定理最一般的形式, 但对我们的应用是足够的.

Fubini 定理 令 $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$ 和 $-\infty\leqslant c<d\leqslant\infty$. 设 $f(x,y)$ 在区域$a<x<b,\ c<y<d$ 上可能除去由有限多条线段的并组成的集合之外是连续函数. 假设

$$\int_c^d\int_a^b|f(x,y)|dxdy<\infty \quad 或 \quad \int_a^b\int_c^d|f(x,y)|dydx<\infty. \tag{4}$$

则

$$\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx. \tag{5}$$

注记 如果 $f(x,y)\geqslant 0$, 则 (5) 成立, 即使 (4) 不成立. 的确, 如果 $f(x,y)\geqslant 0$ 且 (4) 不成立, 则 (5) 的两边都是 $+\infty$, 因 $|f(x,y)|=f(x,y)$. 自然, 因在例 1 和例 2 中 (5) 不成立, 尽管 (5) 的两边都是有限的, 故必是对在这些例子中的函数

$f(x,y)$ 条件 (4) 不满足的情形, 因这些函数满足 Fubini 定理的连续性条件. 我们把这些例子中 (4) 不成立的验证留给有兴趣的读者. 在一些附加假设下, 在附录 3 的末尾我们将给出部分基于 Leibniz 法则的 Fubini 定理的证明. 现在我们提供以下直观的解释. (5) 的两边应该表示函数的图像和 xy–平面之间的净体积, 其中当图像在 xy–平面下面时体积认为负的. 两边只是表示体积元 $f(x,y)dxdy$ 求和的两种方式. 如果在 xy–平面上的总体积, 记作 V^+ 是有限的, 以及在 xy–平面下的总体积, 记作 V^- 是有限的 (即, 如果积分 (4) 中的任一个是有限.), 则计算净体积的两种方法应该得出相同的结果, 即 $V^+ - V^-$(即 (5) 应该成立). 然而, 如果 V^+ 或 V^- 都是无穷的, 则 $V^+ - V^-$ 是 $\infty - \infty$, 这是不确定的 (例如, $\lim_{x\to\infty}(x+1) = \infty$ 和 $\lim_{x\to\infty}(x-1) = \infty$, 但 $\lim_{x\to\infty}[(x+1)-(x-1)] = 2$, 而 $\lim_{x\to\infty}[(x-1)-(x+1)] = -2$). 的确, 计算体积元的一种方法在求和过程中可能从 V^+ 提取比从 V^- 提取多, 而另一种计算方法可能从 V^- 提取比从 V^+ 多. 上述的例 1 就发生过这种情况. □



附录 3 Leibniz 法则

在叙述和证明 Leibniz 法则之前, 我们先给出一些例子, 说明在积分号下求导数并不总是得出正确结果.

例 1 对 x 的每个正值, 有

$$I(x) \equiv \int_0^\infty \frac{\sin(xy)}{y} dy = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin(xy)}{y} dy = \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

的确, 从 y 到 $z = xy$ 的变量变换表明 $I(x)$ 与正数 x 的选取无关, 则当 $x = 1$ 时结果 (1) 在第七章最后的补充中已被证明. 因此, 有

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{\sin(xy)}{y} dy = I'(x) = 0. \tag{2}$$

然而, 如果我们在积分之前先在积分号下求导, 得

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sin(xy)}{y}\right) dy = \int_0^\infty \cos(xy) dy = \lim_{R\to\infty} \frac{\sin(xR)}{x}, \tag{3}$$

此极限不存在. 因 0 存在, 故 (2) 和 (3) 不相等, 即

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{\sin(xy)}{y} dy \neq \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\sin(xy)}{y}) dy \quad (x > 0).$$

因此, 当在积分号下求导数时我们没得到相同的结果. 的确, 我们什么也没得到.

□

例 2 令

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{|x-y|}, & \text{如果}\quad x\neq y,\\ 0, & \text{如果}\quad x=y,\end{cases}$$

即, 如果 $x>y$, $f(x,y)=1$; 如果 $x<y$, $f(x,y)=-1$; 如果 $x=y$, $f(x,y)=0$. $f(x,y)$ 在区域 $x>y$ 上的图像是水平半平面. 因此, 对 $x>y$, $f_x(x,y)=0$. 类似地, 对 $x<y$, $f_x(x,y)=0$. 当 $y=x$ 时, f_x 不存在. 回忆起一个 (单变量) 函数在有限点重新定义或无定义, 它的定积分经这种变化不受影响. 特别, 对任意固定的 x, 变量 y 的函数 $f_x(x,y)$, 除去没有定义的一个点 (即在 x) 之外等于零, 从而它关于 y 在任意区间上的积分等于零. 于是, $\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)dy=0$. 另一方面,

$$\int_0^1 f(x,y)dy=\int_0^x 1dy+\int_x^1(-1)dy=x-(1-x)=2x-1.$$

因此,

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 f(x,y)dy=2\neq 0=\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)dy.$$

于是, 我们不能在积分号下求导数而保持结果不变. □

例 3 令 $f(x,y)=\frac{x^2}{y^2}e^{-x/y}$, $(y>0)$ 和 $f(x,0)=0$. 则

$$h(x)=\int_0^1 f(x,y)dy=\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 x\frac{d}{dy}(e^{-x/y})dy=xe^{-x}.$$

因此,

$$h'(x)=(1-x)e^{-x}\quad \text{和}\quad h'(0)=1.$$

然而,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(\frac{2x}{y^2}-\frac{x^2}{y^3})e^{-x/y},\quad \text{所以}\quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=0.$$

从而

$$\left(\frac{d}{dx}\int_0^1 f(x,y)dy\right)_{x=0}=h'(0)=1\neq 0=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)dy.$$ □

虽然上述例子表明积分号下求导一般是不正确的, 但 Leibniz 法则提供了一个准则, 在该准则下这种运算是允许的. 我们的证明依靠以下关于 Riemann 积分的控制收敛定理的初等形式. 该定理给出了可在积分号下取极限的准则. 证明由 [Lewin, 1986, 1988] 得到启发.

控制收敛定理 令 $f(x)$ 和 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 是定义在某个非空实数区间 I 上分段连续函数 (I 可以是开的或闭的, 有限的或无穷的). 假设对 I 中的每个 x, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. 假设存在分段连续函数 $g(x) \geqslant 0$, 使得 $|f_n(x)| \leqslant g(x)$, 且 $g(x)$ 在 I 上的积分, 记作$\int_I g(x)dx$, 是有限的. (称函数列 $f_n(x)$ 由可积函数 $g(x)$ 控制.) 则

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_I f(x)dx. \tag{4}$$

证明 注意到

$$\left|\int_I f_n(x)dx - \int_I f(x)dx\right| \leqslant \int_I |f_n(x) - f(x)|dx. \tag{5}$$

因此, 为证 (4) 只需证明通过取 n 充分大, (5) 的右边可任意小. 现由 (5) 我们只需对 $f_n \geqslant 0$ 和 $f = 0$ 的情形来证明本定理是真的 (即以 $|f_n(x) - f(x)|$ 替换 f_n, 以 $2g(x)$ 替换 $g(x)$). 自此我们假设 $f_n(x) \geqslant 0$ 和 $f = 0$. 令 L 是任意正实数, 令 J 是 I 中满足 $|x| > L$ 的点 x 的集合. 因 $\int_I g(x)dx < \infty$, 故通过取 L 足够大, 可使 $\int_J g(x)dx$ 任意小. 而且由于 $0 \leqslant f_n(x) \leqslant g(x)$, 故通过取 L 足够大, 也可使 $\int_J f_n(x)dx$ 任意小 (同时对所有的 n). 令 K 是 I 中不属于 J 中的点的集合. 因此, K 是包含在 $[-L, L]$ 内的有限区间. 剩下来要证明 $\lim_{n\to\infty} \int_K f_n(x)dx = 0$.

定义在 K 上的**阶梯函数**在 K 中有限多个子区间的每个子区间上都是常数, 且在 K 中其他处为零. 因在闭区间上分段连续函数是 Riemann 可积的, 故知 $\int_K f_n(x)dx$ 可由下和任意逼近. 换言之, 存在阶梯函数 $s_n(x)$, 使得对 K 中所有的 x, 有 $0 \leqslant s_n(x) \leqslant f_n(x)$, 且

$$0 \leqslant \int_K f_n(x)dx \leqslant \int_K s_n(x)dx + \frac{1}{n}.$$

因此, 只需证明 $\lim_{n\to\infty} \int_K s_n(x)dx = 0$. 令 $G(x)$ 是定义在 K 上的阶梯函数, 使得对 K 中所有的 x, 有 $G(x) \geqslant g(x)$, 且 $\int_K G(x)dx \leqslant \int_K g(x)dx + 1 < \infty$. 对任意固定的 $\epsilon > 0$, 令

$$E_n = \{x \in K:\ s_n(x) > \epsilon G(x)\} \quad 和 \quad T_n = \{x \in K:\ s_n(x) \leqslant \epsilon G(x)\}.$$

因 s_n 和 G 都是阶梯函数, 故 E_n 和 T_n 是有限多个区间的并. 则

$$\begin{aligned}\int_K s_n(x)dx &= \int_{E_n} s_n(x)dx + \int_{T_n} s_n(x)dx \leqslant \int_{E_n} s_n(x)dx + \int_{T_n} \epsilon G(x)dx \\ &\leqslant \int_{E_n} G(x)dx + \epsilon\left(\int_K g(x)dx + 1\right),\end{aligned}$$

其中我们利用了对 E_n 中的 x, 有 $s_n(x) \leqslant f_n(x) \leqslant g(x) \leqslant G(x)$. 因此,

$$\int_K s_n(x)dx \leqslant \mu(E_n) + \epsilon\left(\int_K g(x)dx + 1\right), \tag{6}$$

其中 $\mu(A) \equiv \int_A G(x)dx$, A 是 K 中由有限多个子区间的并组成的任意子集. 称这样的子集 A 为**基本的**. 因 ϵ 是任意的, 故只需证明 $\lim_{n\to\infty}\mu(E_n) = 0$.

$$\text{令}\quad F_n = \bigcup_{m\geqslant n} E_m = \{x \in K : s_m(x) > \epsilon G(x) \quad \text{至少有一个 } m \geqslant n\}. \tag{7}$$

注意到 $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$(即集合 F_n 随 n 增加而 "收缩"). 不存在属于所有集合 F_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$ 的点, 因为 $f_n(x)$ 收敛到 0 且在 K 上 $f_n(x) \geqslant s_n(x)$(即使对某个 x, $\epsilon G(x) = 0$, 我们仍然有 $0 \leqslant s_n(x) \leqslant f_n(x) \leqslant g(x) \leqslant G(x) = 0$, 即对所有的 n, 有 $s_n(x) = 0$, 因此 x 不属于集合 F_n.) 回忆到我们想证明 $\lim_{n\to\infty}\mu(E_n) = 0$. 假设不对, 则存在常数 c, 使得对无穷多个 n 有 $\mu(E_n) > c > 0$. 对每个 $n = 1, 2, 3, \cdots$, 令 H_n 是 F_n 的子集, 使得 H_n 由有限多个闭区间组成, 且对 F_n 中每个基本子集 A, 有

$$\mu(H_n) > \mu(A) - c2^{-n}. \tag{8}$$

注意到 $\mu(A) < \mu(K) < \infty$, 所以 H_n 存在. 令

$$Z_n \equiv \bigcap_{m\leqslant n} H_m = H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n.$$

则 Z_n 构成一个收缩的闭有界集列, 且如果它们都不是空集的话必存在交集中的点.(对每个 n, 从 Z_n 中选一点 p_n, 并注意到由附录 4 的 Bolzano-Weierstrass 定理, p_n 有收敛到属于每个闭有界集 Z_n 的一个点的子列.) 然而, 不存在点属于每个 Z_n, 因 $Z_n \subset H_n \subset F_n$ 以及 F_n 没有公共点. 因此, 对某个 n_0, Z_{n_0} 必是空集, 于是对所有 $n \geqslant n_0$, Z_n 是空集. 然而, 对 $n \geqslant n_0$ 和 $0 \leqslant i \leqslant n$, E_n 是 F_i 的子集, $H_i \cup E_n$ 是 F_i 的由有限多个区间组成的子集. 由 (8), 有

$$\mu(H_i) \geqslant \mu(E_n \cup H_i) - c2^{-i} = \mu(E_n - H_i) + \mu(H_i) - c2^{-i}$$

或 $\mu(E_n - H_i) \leqslant c2^{-i}$. 则对 $n > n_0$, 有

$$\mu(E_n) = \mu(E_n - Z_n) \leqslant \mu(E_n - H_1) + \cdots + \mu(E_n - H_n) \leqslant (2^{-1} + \cdots + 2^{-n})c < c. \quad (9)$$

现 (9) 与我们以下的假设矛盾: 对无穷多个 n, $\mu(E_n) > c$. 因此, 假设 $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) \neq 0$ 是错误的, 从而 $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$ 为真. 于是由 (6), 通过先取 ϵ 很小, 然后取 n 足够大, 可使 $\int_K s_n(x)dx$ 如期望的那样小. □

在许多情形, 以下控制收敛定理的 "连续" 形式是方便的, 它相当容易从上述 "离散" 形式得到.

推论 (控制收敛定理 —— 连续形式) 对包含 h_0 的某个区间 H 内的每个实数 h, 令 $F(x,h)$ 是定义在某个非空实数区间 I(可能是开的或闭的, 有限的或无穷的) 上 x 的分段连续函数. 假设 $f(x) = \lim_{h\to h_0} F(x,h)$ 是 I 上分段连续的. 假设存在分段连续函数 $g(x) \geqslant 0$, 使得对所有的 $x \in I$ 和 $h \in H$, 有$|F(x,h)| \leqslant g(x)$, 以及 $g(x)$ 在 I 上的积分是有限的, 该积分记为 $\int_I g(x)dx$. 则

$$\lim_{h\to h_0} \int_I F(x,h)dx = \int_I \lim_{h\to h_0} F(x,h)dx = \int_I f(x)dx. \quad (4')$$

证明 令 $h_1, h_2, \cdots$ 是 H 中任意点列, 使得 $\lim_{n\to\infty} h_n = h_0$. 令 $f_n(x) = F(x, h_n)$. 因 $f(x)$ 和 $f_n(x)$ 满足控制收敛定理的假设以及数列 $h_1, h_2, \cdots$ 可任意接近 h_0, 故有

$$\lim_{h\to h_0} \int_I F(x,h)dx = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I f(x)dx = \int_I \lim_{h\to h_0} F(x,h)dx. \quad \square$$

定理 (Leibniz 法则) 令 R 是 xt–平面中的区域 $-\infty \leqslant c < x < d \leqslant +\infty$, $-\infty \leqslant a < t < b \leqslant +\infty$. 令 $f(x,t)$ 是定义在 R 上的连续函数, 使得 $f_t(x,t)$ 在R 上也是连续的. 并假设对 (a,b) 内每个 t, $\int_c^d |f(x,t)|dx < \infty$. 假设存在分段连续函数 $g(x)$, 使得对 R 中所有的 (x,t),

$$|f_t(x,t)| \leqslant g(x) \quad \text{和} \quad \int_c^d g(x)dx < \infty. \tag{10}$$

则

$$\frac{d}{dt}\int_c^d f(x,t)dx = \int_c^d \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx \quad (a < t < b). \tag{11}$$

如果 c 和 d 是有限的, 且 $f(x,t)$ 和 $f_t(x,t)$ 在区域 $c \leqslant x \leqslant d$ 和 $a < t < b$ (包括端点 $x = c$ 和 $x = d$) 上连续, 则不需要 (10) 就可得到 (11).

证明 由导数的定义, 得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_c^d f(x,t)dx &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_c^d f(x,t+h)dx - \int_c^d f(x,t)dx\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\int_c^d \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}dx.\end{aligned}$$

下面证明在积分号下求导数是正当的. 利用微积分的基本定理及假设 $|f_t(x,t)| \leqslant g(x)$, 有

$$|f(x,t+h)-f(x,t)| = \left|\int_t^{t+h} f_t(x,s)ds\right| \leqslant \left|\int_t^{t+h} |f_t(x,s)|ds\right| \leqslant g(x)|h|$$

或

$$\left|\frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}\right| \leqslant g(x).$$

因此, 可利用 (4′)(参看上述的推论), 得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_c^d f(x,t)dx &= \lim_{h\to 0}\int_c^d \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}dx\\ &= \lim_{h\to 0}\int_c^d \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}dx = \int_c^d \frac{\partial}{\partial t}f(x,t)dx.\end{aligned}$$

现在来证明本定理的最后断言. 对任意 $t \in (a,b)$, 选 α 和 β, 使得 $a < \alpha \leqslant t \leqslant \beta < b$. 如果 c 和 d 是有限的, 且 $f_t(x,t)$ 在闭矩形区域 $c \leqslant x \leqslant d$, $a < \alpha \leqslant$

$t \leqslant \beta < b$ 上连续, 则可选函数 $g(x)$ ((10) 中要求的, 但现在 $t \in (\alpha, \beta)$) 为等于 $|f_t(x,t)|$ 在该闭矩形区域上的最大值的常值函数. 在附录 4 中独立地证明了该最大值的存在性, 在附录 4 证明了在闭矩形上的连续函数 (例如, $|f_t|$) 有最大值. 令最大值为 M, 我们有 $\int_c^d g(x)dx = M(d-c) < \infty$. 因此, 在该情形假设 (10) 满足, 于是本定理最后断言得证. □

注记 (推广) Leibniz 法则的更一般形式表明, 如果 $f(x,t)$ 满足上面定理中的假设, $c(t)$ 和 $d(t)$ 是 C^1 函数, 对 $a < t < b$ 满足 $c < c(t)$ 和 $d(t) < d$, 则

$$\frac{d}{dt}\int_{c(t)}^{d(t)} f(x,t)dx = f(d(t),t)d'(t) - f(c(t),t)c'(t) + \int_{c(t)}^{d(t)} f_t(x,t)dx. \qquad (12)$$

该结果的证明过程如同第 3.4 节中定理 1(Duhamel 原理) 前的引理的证明. 换言之, 考虑函数 $H(w,z,t) = \int_w^z f(x,t)dx$, 则由链法则

$$\frac{d}{dt}\big(H(c(t),d(t),t)\big) = H_w c'(t) + H_z d'(t) + H_t,$$

微积分基本定理和 Leibniz 法则立刻得 (12). 我们还提及控制收敛定理和 Leibniz 法则可以没有更多困难地推广到多重积分的情形. 而且, 当 $f(x,t)$ 是 t 的连续函数, 但关于 x 仅是分段连续, 且 $f_t(x,t)$ 关于 t 是分段连续时, 上述 Leibniz 法则的证明仍然有效. 作为一个推论, 易证以下有关函数无穷级数逐项求导的有用结果. □

定理 (级数的逐项求导) 令 $f_1(t), f_2(t), \cdots$ 是定义在 (c,d) 上 C^1 函数列, 其中 $-\infty \leqslant c < d \leqslant \infty$. 假设存在常数 M_n, 使得 $|f_n'(t)| \leqslant M_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ 对 (c,d) 中每个 t 是收敛的, 则

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t).\right) \qquad (13)$$

证明 定义 $f(x,t) = f_n(t)$, $n-1 \leqslant x \leqslant n$, $n = 1,2,\cdots$. 注意到 $f_t(x,t)$ 关于 t 是连续的, 关于 x 是分段连续的 (参看上述注记的结束部分). 并令 $g(x) = M_n$, $n-1 \leqslant x \leqslant n$, $n = 1,2,\cdots$. 则 $|f_t(x,t)| \leqslant g(x)$ 以及 $\int_0^{\infty} g(x)dx =$

$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. 因此, 由 Leibniz 法则, 得

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\Big) = \frac{d}{dt}\Big(\int_0^{\infty} f(x,t)dx\Big) = \int_0^{\infty} f_t(x,t)dx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t). \qquad \square$$

下面的 Fubini 定理的证明也要用到 Leibniz 法则:

带一些新假设的 Fubini 定理 (见附录 2 中的叙述) **的证明** 除了附录 2 的 Fubini 定理中的假设之外, 此处我们还假设:

1. $f(x,y)$ 在任意闭子矩形 $a<x<b$, $c<y<d$ 上有界.
2. 函数 $f(x,y)$ 关于 x 和关于 y 是分段连续的.
3. 对所有满足 $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$ 的 α 和 β, 积分 $\int_\alpha^\beta f(x,y)dx$ 和 $\int_\alpha^\beta |f(x,y)|dx$ 是 y 的分段连续函数.
4. 对所有满足 $c \leqslant \gamma < \delta \leqslant d$ 的 γ 和 δ, 积分 $\int_\gamma^\delta f(x,y)dy$ 和 $\int_\gamma^\delta |f(x,y)|dy$ 是 x 的分段连续函数.

假设 $\int_c^d \int_a^b |f(x,y)|dxdy < \infty$. 证明

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx.$$

由对称性得到另一种情形. 对 $c<y<d$, 令

$$G(x,y) = \int_c^y f(x,z)dz,$$

对 $a<\alpha<\beta<b$, 令

$$H(y) = \int_\alpha^\beta G(x,y)dx.$$

对使 $f(x,y)$ 在 $y=y_0$ 是 y 的连续函数的任意 x 值, 由微积分基本定理, 有 $G_y(x,y_0)=f(x,y_0)$. 因此, 由关于 $f(x,y)$ 的假设, $G_y(x,y)$ 是在任意闭子矩形上有界的 x 和 y 的分段连续函数. 而且, 利用 $f(x,y)$ 在闭子矩形上的有界性, 可知 $G(x,y)$ 对每个 x 是 y 的连续函数 (为什么?). 于是, 由 Leibniz 法则 (同样参看上述注记结束部分),

$$H'(y) = \int_\alpha^\beta G_y(x,y)dx = \int_\alpha^\beta f(x,y)dx.$$

则由微积分基本定理, 得

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \int_c^d f(x,y)dydx &= H(d) = \int_c^d H'(y)dy = \int_c^d \int_\alpha^\beta G_y(x,y)dxdy \\ &= \int_c^d \int_\alpha^\beta f(x,y)dxdy.\end{aligned}$$

现在

$$\int_\alpha^b \int_c^d f(x,y)dydx = \lim_{\beta\to b}\int_\alpha^\beta \int_c^d f(x,y)dydx = \lim_{\beta\to b}\int_c^d \int_\alpha^\beta f(x,y)dxdy.$$

对 $c < y < d,\ \alpha < \beta < b$, 令 $F(\beta, y) = \int_\alpha^\beta f(x,y)dx$. 则由假设,①

$$|F(\beta,y)| \leqslant g(y) \equiv \int_a^b |f(x,y)|dx \quad 和 \quad \int_c^d g(y)dy = \int_c^d \int_a^b |f(x,y)|dxdy < \infty.$$

因此, 由控制收敛定理, 得

$$\begin{aligned}\lim_{\beta\to b}\int_c^d \int_\alpha^\beta f(x,y)dxdy &= \lim_{\beta\to b}\int_c^d F(\beta,y)dy = \int_c^d \lim_{\beta\to b} F(\beta,y)dy \\ &= \int_c^d \int_\alpha^b f(x,y)dxdy.\end{aligned}$$

对极限 $a \to \alpha$ 利用类似的论证, 得到期望的结果. □



①原书下式中的 $\int_c^d g(y)dy$ 误作 $\int_c^d g(y)dx$.——译者

附录 4 最大值最小值定理

不是每个函数都有最大值或最小值. 例如, 函数 $f(x)=x^3(-\infty<x<\infty)$ 没有最大值和最小值. 还有, 即使函数 $f(x)=\arctan x$ 有任意接近 $\frac{\pi}{2}$ 的值, 但对任何实数 x 不能达到该值. 本节的目的是找出确保一个多变量函数在给定的区域内的点处达到最大值和最小值的准则. 作为具体的, 我们讨论 xy–平面 (即 $\mathbf{R}^2$) 的子集和函数 $f(x,y)$, 但所有这些考虑可容易推广到 n 变量的情形, $n=1,2,3,\cdots$. $\mathbf{R}^2$ 的子集 C 是**闭的**, 如果每个 C 中的收敛点列的极限点本身在 C 内, 例如, 一矩形区域是闭的, 仅当这些边缘包含在该区域. $\mathbf{R}^2$ 的子集是**有界的**, 如果它能包含在一个充分大 (但是有限的) 正方形内. 例如, 圆盘是有界的, 但半平面不是有界的. 定义在 $\mathbf{R}^2$ 的子集 C 上的函数是**连续的**, 如果对 C 内每个点列 $p_n=(x_n,y_n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$, 它收敛于 C 中的某点 $p=(x,y)$, 有函数值 $f(p_n)$ 列收敛到值 $f(p)$. (有其他连续的等价定义, 但这个定义对我们的目的是方便的.) 我们主要目的是证明最大值最小值定理, 该定理表明在一闭有界子集上有定义且连续的函数有最大值和最小值. 为了证明, 我们需要以下结果.

定理 1($\mathbf{R}^2$ 上 Bolzano-Weierstrass 定理) 令 $p_n=(x_n,y_n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 是构成 $\mathbf{R}^2$ 的有界子集 B 的点列. 则该点列存在收敛的子列.

证明 为方便起见, 我们均匀收缩和平移该有界集 B, 使得它落在单位正

方形 $\{(x,y): 0 < x,\ y < 1\}$ 内. 令 $D = \{0,1,2,\cdots,9\}$ 是十进制展开所有可能数字的集合. D 中存在数字 a_1 和 b_1, 使得对无穷多个 n 的值, x_n 的十进制展开以 $0.a_1$ 开始, y_n 的十进制展开以 $0.b_1$ 开始. 令 N_1 是所有这些 n 的值的集合. 存在数字 a_2 和 b_2, 使得对 N_1 中无穷多个 n 的值, x_n 和 y_n 的十进制展开分别以 $0.a_1a_2$ 和 $0.b_1b_2$ 开始. 令 N_2 是由这些 n 的值组成的 N_1 中的 (无穷) 子集. 类似地, 可构造无穷集 $N_3, N_4, N_5, \cdots$(每个包含在前一个内). 对 N_1 中某个 n_1, 令 $q_1 = p_{n_1}$, 对 N_2 中某个 n_2(大于 n_1), 令 $q_2 = p_{n_2}$, 类似地定义 $q_3, q_4, \cdots$. 令 $q = (0.a_1a_2a_3\cdots,\ 0.b_1b_2b_3\cdots)$. 由于 q_n 到 q 的距离 $\leqslant [(10^{-n})^2 + (10^{-n})^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}10^{-n}$, 故子列 $q_1, q_2, q_3, \cdots$ 收敛到 q. □

最大值最小值定理 令 $f(x,y)$ 是定义在 $\mathbf{R}^2$ 的闭有界非空子集 C 上的连续函数. 则 C 中存在点 $(\underline{x},\underline{y})$ 和 $(\bar{x},\bar{y})$, 使得对 C 中所有的 (x,y), 有

$$f(\underline{x},\underline{y}) \leqslant f(x,y) \leqslant f(\bar{x},\bar{y}).$$

特别, 对某个常数 K, 有 $|f(x,y)| \leqslant K$.

证明 先证明存在常数 M, 使得 $f(x,y) < M$. 如果常数 M 不存在, 则可找出点列 $p_1, p_2, p_3, \cdots$, 使得 $f(p_n) > n$. 由定理 1, 存在收敛于闭有界集 C 中某点 q 的子列 $q_1, q_2, q_3, \cdots$. 然而因假设 f 是连续的, 故有 $f(q) = \lim_{n\to\infty} f(q_n)$, 该极限不存在. 这与 f 在 C 中所有的点有定义矛盾. 令 S 是当 (x,y) 取遍 C 时所有值 $f(x,y)$ 的集合. 对任意实数 r 和正整数 n, 令 $r[n]$ 是 r 在第 n 位十进制的截断 (即, $\sqrt{2}[3] = 1.414$). 令 s_n 是 S 中的数, 使得 $s_n[n]$ 是最大的. s_n 的存在性由大于 S 中所有数的常数 M 的存在性来保证. 令 s 是对所有的 $n = 1,2,3,\cdots$ 满足 $s[n] = s_n[n]$ 的实数. 根据构造, S 中所有的数小于或等于 s. 因此, 如果能证明存在 C 中的点 $(\bar{x},\bar{y})$, 使得 $f(\bar{x},\bar{y}) = s$, 则对 C 中所有的 (x,y), $f(x,y) \leqslant f(\bar{x},\bar{y})$. 令 $P_n = (x_n, y_n)$ 是 C 中的点, 使得 $f(x_n, y_n) = s_n$, s_n 定义如上. 由定理 1, 数列 $P_1, P_2, P_3, \cdots$ 有收敛于闭有界集 C 内某点 Q 的子列 $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$ (比如 $Q_i = P_{n_i}$, $i = 1,2,\cdots$). 由 f 的连续性, 我们有 $f(Q) = \lim_{i\to\infty} f(Q_i) = \lim_{i\to\infty} s_{n_i} = s$. 因此, Q 可作为点 $(\bar{x},\bar{y})$, 使得 $f(x,y) \leqslant f(\bar{x},\bar{y})$. 因 $-f(x,y)$ 也在 C 上连续, 故现在得知也存在某点 $(\underline{x},\underline{y})$, 使得对 C 中所有的 (x,y), $-f(x,y) \leqslant -f\ (\underline{x},\underline{y})$ (或 $f(\underline{x},\underline{y}) \leqslant f(x,y)$). □

注记 最大值最小值定理一个更常见的证明如下. 令 M_0 是最小的常数, 它大于或等于当 (x,y) 取遍 C 时所有的值 $f(x,y)$. 因我们已经证明对某个常数

M, $f(x,y) < M$, 故 M_0 的存在性由所谓的**上确界公理**得到. 该公理表明每个有上界的实数集有上确界. 在上述 "构造性" 证明中我们刻意避免该公理. 然而, 如果利用该公理, 则我们只需证明对 C 内某个 (x_0, y_0), $M_0 = f(x_0, y_0)$. 如果不是这样, 则 $g(x,y) = [M_0 - f(x,y)]^{-1}$ 在 C 上连续 (为什么?). 因此, 对某个正常数 K, $g(x,y) < K$. 于是 $M_0 - f(x,y) = g(x,y)^{-1} > K^{-1}$, 或 $f(x,y) < M_0 - K^{-1}$, 与 M_0 的定义矛盾. □



附录 5　Fourier 变换表[①]

$f(x)$	$\hat{f}(\xi)\left(=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx\right)$
1. $f'(x)$	$i\xi\hat{f}(\xi)$
2. $f^{(m)}(x)\quad(m=0,1,2,...)$	$i^m\xi^m\hat{f}(\xi)$
3. $xf(x)$	$i\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)$
4. $x^mf(x)\quad(m=0,1,2,...)$	$i^m\frac{d^m}{d\xi^m}\hat{f}(\xi)$
5. $f(x+a)\quad$(a 为实数)	$e^{ia\xi}\hat{f}(\xi)$
6. $e^{ibx}f(ax)\quad$(a,b 为实数, $a\neq 0$)	$\frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\xi-b}{a}\right)$
7. $(f*g)(x)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dy$	$\sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$
8. $f(x)=\begin{cases}1, & \text{如果}\lvert x\rvert\leqslant L\\ 0, & \text{如果}\lvert x\rvert>L\end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2\sin(\xi L)}{\xi}$
9. $f(x)=\begin{cases}L-\lvert x\rvert, & \text{如果}\lvert x\rvert\leqslant L\\ 0, & \text{如果}\lvert x\rvert>L\end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos(\xi L)}{\xi^2}$
10. $e^{-\frac{1}{2}ax^2}\quad(a>0)$	$\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{1}{2}\xi^2/a}$
11. $e^{-a\lvert x\rvert}\quad(a>0)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{a^2+\xi^2}$
12. $\frac{1}{a^2+x^2}\quad(a>0)$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}e^{-a\lvert\xi\rvert}$
13. $e^{-a\lvert x\rvert}\cos(bx)\quad(a,b>0)$	$\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{[a^2+(b-\xi)^2]}+\frac{1}{[a^2+(b+\xi)^2]}\right)$
14. $e^{-\frac{1}{2}ax^2}\sin(bx)\quad(a,b>0)$	$\frac{1}{2i\sqrt{a}}\left(e^{-\frac{1}{2}(\xi-b)^2/a}-e^{-\frac{1}{2}(\xi+b)^2/a}\right)$
15. $\delta(x-c)\quad$(c为实数)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ic\xi}$

①表中所列的结果来自第七章.

附录 6　Bessel 函数

在本教材的第 8.2, 8.3 和 4.4 节中讨论了 Bessel 函数. 对 Bessel 函数详细论述的经典参考文献是 G.N.Watson, *Bessel functions*, 2nd ed. Cambridge, Cambridge University Press, 1958(也可见 E.T. Whittaker and G.N. Watson, 4th ed.*A course of modern analysis*, Cambridge, Cambridge University Press, 1952). 以下收集了 Bessel 函数的一些基本定义和性质.

I. 实数 ν 阶的 Bessel 微分方程是

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0. \tag{1}$$

满足 (1) 的ν **阶第一类 Bessel 函数**由以下定义

$$J_\nu(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4}x^2)^k}{k!\Gamma(1+\nu+k)},\ \nu \neq -1, -2, \cdots, \tag{2}$$

其中 Γ 是 **Gamma函数**, $\Gamma(s) \equiv \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx,\ s > 0$, 且如果 $n = 1, 2, \cdots, \Gamma(1+n) = n!$. Gamma 函数的倒数可唯一地延拓成对所有复数有定义的解析函数

"$1/\Gamma(z)$", 且 $1/\Gamma(z)$ 只在 $z=0,-1,-2,\cdots$ 处为零. 该事实可用来使 (2) 有意义, 即使当 ν 是负数, $\nu\neq-1,-2,\cdots$.

当 ν 不是整数, 函数 $J_{-\nu}(x)$ 和 $J_\nu(x)$ 是 (1) 的两个线性无关的解, 任意其他的解是它们的线性组合. 一个标准的线性组合是**实数 ν 阶第二类 Bessel 函数** Y_ν, 即

$$Y_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi)-J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)},\quad \nu\neq0,\pm1,\pm2,\cdots. \tag{3}$$

对整数 m, $k\geqslant0$, 由上面回忆到对 $1-m+k\leqslant0$, 即 $k\leqslant m-1$, $1/\Gamma(1-m+k)=0$. 因此, 对 $\nu=-m$, 由 (1) 得 $J_{-m}(x)=(-1)^mJ_m(x)$. 因此, 如果 m 是整数, $J_m(x)$ 和 $J_{-m}(x)$ 不是线性无关的. 然而, $\nu=m$ 时, (1) 的与 $J_m(x)$ 线性无关的解是整数阶 m 第二类 **Bessel** 函数 $Y_m(x)$, 它定义为 (3) 中 $Y_\nu(x)$ 当 $\nu\to m$ 时的极限. 在所有情形, $c_1J_\nu(x)+c_2Y_\nu(x)$ 是 (1) 的通解. 对 $m=0,1,2,\cdots$.

$$\begin{aligned}Y_m(x)=&\frac{2}{\pi}\ln(\frac{1}{2}x)J_m(x)-\frac{1}{\pi}(\frac{1}{2}x)^{-m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-k-1)!}{k!}(\frac{1}{4}x^2)^k\\&-\frac{1}{\pi}(\frac{1}{2}x)^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{4}x^2)^k}{k!(m+k)!}\big(\psi(k+1)+\psi(m+k+1)\big),\end{aligned} \tag{4}$$

其中如果 $m=0$, 第一个求和项为 0, $\psi(n)\equiv-\gamma+\sum_{q=1}^{n-1}\frac{1}{q}$ $(n=2,3,\cdots)$, $\gamma=0.57721566\cdots$ 是 **Euler常数**$[\gamma\equiv\lim_{n\to\infty}(\sum_{q=1}^{n-1}\frac{1}{q}-\ln n)]$ 以及 $\psi(1)\equiv-\gamma$. 对整数 $m\leqslant0$, 由 (2) 和 (3), 经取极限 $\nu\to-m$, 得 $Y_{-m}(x)=(-1)^mY_m(x)$.

II. 整数 m 阶 Bessel 函数一些基本性质

1. 微分递归式:

$$\frac{d}{dx}(x^mJ_m(x))=x^mJ_{m-1}(x)\quad 和\quad \frac{d}{dx}(x^mY_m(x))=x^mY_{m-1}(x)\ (m\geqslant1). \tag{5}$$

2. 纯递归式:

$$2mJ_m(x)=x\big(J_{m-1}(x)+J_{m+1}(x)\big)$$

和 $(m>1)$ (6)

$$2mY_m(x)=x\big(Y_{m-1}(x)+Y_{m+1}(x)\big).$$

3. $J_m(x)(m=0,1,2,\cdots)$ **的 Bessel 积分:**

$$J_m(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(mt-x\sin t)dt. \tag{7}$$

4. $J_m(x)$ **的生成函数:**

$$f(x,t)\equiv\exp\Big(\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})\Big)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(x)t^m \quad (t\neq 0). \tag{8}$$

因 $f(x,t)f(-x,t)\equiv 1\ (t\neq 0)$, 故得

$$J_0(x)^2+2\sum_{m=0}^{\infty}J_m(x)^2=1, \tag{9}$$

于是

$$|J_0(x)|\leqslant 1 \quad 和 \quad |J_m(x)|\leqslant\sqrt{\frac{1}{2}} \quad (m=1,2,3,\cdots;\ x \quad 是实数). \tag{10}$$

5. 渐近行为: 对固定的 m, 当 $x\to\infty$, 我们有

$$J_m(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\big(x-\frac{1}{2}\pi m-\frac{1}{4}\pi\big)+O(x^{-\frac{3}{2}})\ (x\to\infty) \tag{11}$$

$$Y_m(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\big(x-\frac{1}{2}\pi m-\frac{1}{4}\pi\big)+O(x^{-\frac{3}{2}})\ (x\to\infty) \tag{12}$$

III. 第一类半阶 Bessel 函数

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, \qquad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x, \tag{13}$$

$$J_{m+\frac{3}{2}}=-x^{m+\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\big(x^{-(m+\frac{1}{2})}J_{m+\frac{1}{2}}(x)\big), \tag{14}$$

$$J_{m-\frac{1}{2}}(x)=x^{-(m+\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\big(x^{(m+\frac{1}{2})}J_{m+\frac{1}{2}}(x)\big) \quad (m=0,1,2,\cdots). \tag{15}$$

IV. $J_m(x)(m=0,1,2,3,4)$ **零点表**[1]:

$J_m(x)$ $(m=0,1,2,\cdots)$ 有无穷多个零点, 所有这些零点是实数. 如果 $j_{m,k}$ 表示 $J_m(x)$ 的第 k 个正零点, 以增加次序排列, 则 (参看 (11)),

$$j_{m,k} \approx \left(k+\frac{1}{2}m-\frac{1}{4}\right)\pi, \quad k \gg m. \tag{16}$$

$m=0,1,2,3,4$ 的 $J_m(x)$ 一些零点表

m	$j_{m,1}$	$j_{m,2}$	$j_{m,3}$	$j_{m,4}$	$j_{m,5}$
0	2.40482...	5.52007...	8.65372...	11.79153...	14.93091...
1	3.83170...	7.01558...	10.17346...	13.32369...	16.47063...
2	5.13562...	8.41724...	11.61984...	14.79595...	17.95981...
3	6.38016...	9.76102...	13.01520...	16.22346...	19.40941...
4	7.58834...	11.06470...	14.37253...	17.61596...	20.82693...

[1] 我们在 Sun Spare 1000 上用 Macsyma, 在 486DX2 PC 上用 Microsoft Windows 3.1 获得该表中所列的零点.

参考文献

A

Abbott M B. *An introduction to the method of characteristics*, American Elsevier Pub. Co., New York, 1966.

Abraham R, Marsden J E, Ratiu T. *Manifolds, tensor analysis, and applications*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1988.

Agmon S. *Lectures on elliptic boundary value problems*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1965.

Ahlfors L V. *Complex analysis; an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1966.

Ames W F. *Numerical methods for partial differential equations*, Nelson London, 1969.

Ames W F. *Nonlinear partial differential equations in engineering* , Academic Press, New York, 1972.

Ames W F, Rogers C. *Nonlinear boundary value problems in science and engineering*, Academic Press, Boston, 1989.

Andrews L C. *Elementary partial differential equations with boundary value problems*, Academic Press, Orlando, 1986.

Andrews L C. *Special functions for engineers and applied mathematicians*, MacMillan, New York, 1985.

Antman S S. *The equations for large vibrations of strings*, Amer. Math. Monthly **87** (1980), 359~370.

Apostol T M. *Calculus,* Vols. 1 and 2, 2nd ed., Blaisdell Pub. Co., Waltham, Mass., 1969.

Apostol T M. *Mathematical analysis ; a modern approach to advanced calculus*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957

Avery J. *Hyperspherical harmonics: applications in quantum theory*, Kluwer Academic, Boston, 1989.

Axelsson O, Barker V A. *Finite element solution of boundary value problems: theory and computation*, Academic Press, Orlando, 1984.

Ayres F. *Schaum's outline of theory and problems of differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1952.

B

Bari N K. *A treatise on trigonometric series*, Pergamon Press, New York, 1964.

Bateman H. *Partial differential equations of mathematical physics*, Dover, New York, 1944.

Bathe K, Wilson E L. *Numerical methods in finite element analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1976.

Beckenbach E F. *Modern mathematics for the engineer,* Vols. 1 and 2, McGraw-Hill, New York, 1956~1961.

Beckenbach E F, Bellman R E. *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

Bellman R E. *Stability theory of differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1953.

Bellman R E, Adomian G. *Partial differential equations: new methods for their treatment and solution*, Reidel Pub. Co., Hingham, Mass., 1985.

Bellman R E, Cooke K L. *Modern elementary differential equations*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1971.

Bellman R E, Kalaba R E, Lockett J. *Numerical inversion of the Laplace transform: application to biology, economics, engineering and physics*, American

Elsevier Pub. Co., New York, 1966.

Bérard P H. *Spectral geometry: direct and inverse problems*, Springer-Verlag, New York, 1986.

Berg P W, McGregor J L. *Elementary partial differential equations*, Holden-Day, San Francisco, 1966.

Berman A, Plemmons R J. *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*, Academic Press, New York, 1979.

Birkhoff G, Lynch R E. *Numerical solution of elliptic problems*, SIAM, Philadelphia, 1984.

Birkhoff G, Rota G C. *Ordinary differential equations*, 2nd ed., Blaisdell, Waltham, Mass., 1969.

Birkhoff G, Schoenstadt A L. *Elliptic problem solvers II*, Academic Press, Orlando, 1984.

Bjorck A, Plemmons R J, Schneider H. *Large scale matrix problems*, North-Holland, New York, 1981.

Bjorken J D, Drell S D. *Relativistic quantum fields*, McGraw-Hill, New York, 1965.

Bland D R. *Wave theory and applications*, Oxford University Press, Oxford, 1988.

Bleecker D. *Gauge theory and variational principles*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1981.

Bleistein N. *Mathematical methods for wave phenomena*, Academic Press, New York, 1984.

Boas R P. *Inversion of Fourier and Laplace transforms*, Amer. Math. Monthly **69** (1962), 955~960.

Boccardo L, Tesei A. *Nonlinear parabolic equations: qualitative properties of solutions*, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1987.

Bowman F. *Introduction to Bessel functions*, Dover, New York, 1958.

Bowman F, Gerard F A. *Higher calculus*, Cambridge Univ. Press, London, 1967.

Botha J F, Pinder G F. *Fundamental concepts in the numerical solution of differential equations*, Wiley, New York, 1983.

Boyce W E, Di Prima R C. *Elementary differential equations and boundary value problems*, Wiley, New York, 1965.

Brand L. *Advanced calculus; an introduction to classical analysis*, Wiley, New

York, 1955.

Brand L. *Differential and difference equations*, Wiley, New York, 1966.

Braun M. *Differential equations and their applications: an introduction to applied mathematics*, 3rd ed., Springer-Verlag, New York, 1983.

Broman A E. *Introduction to partial differential equations; from Fourier series to boundary-value problems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1970.

Buck R C, Buck E F. *Advanced calculus*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1965.

Burkill J C. *The theory of ordinary differential equations*, 2nd ed., Interscience Publishers, New York, 1962.

Byerly W E. *An elementary treatise on Fourier's series, and spherical, cylindrical, and ellipsoidal harmonics, with applications to problems in mathematical physics*, Dover, New York, 1959.

C

Cajori F. *The early history of partial differential equations and of partial differentiation and integration*, Amer. Math. Monthly 35(1928), 459～467.

Cannon J R. *The one-dimensional heat equation*, Cambridge Univ. Press, New York, 1984.

Carasso A, Stone A P, John F. *Improperly posed boundary value problems*, Pitman, San Francisco, 1975.

Carnahan B, Luther H A, Wilkes J O. *Applied numerical methods*, Wiley, New York, 1969.

Carslaw H S. *Introduction to the theory of Fourier's series and integrals*, 3rd ed., Dover, New York, 1930.

Carslaw H S, Jaeger J C. *Conduction of heat in solids*, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford, 1959.

Cercignani C. *The Boltzmann equation and its applications*, Springer-Verlag, New York, 1988.

Ceschino F, Kuntzmann J. *Numerical solution of initial value problems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1966.

Chester C R. *Techniques in partial differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1971.

Chavel I. *Eigenvalues in Riemannian geometry*, Academic Press, New York, 1984.

Churchill R V, Brown J W. *Fourier series and boundary value problems*, 4th ed., McGraw-Hill, New York, 1987.

Ciarlet P, Kesavan S, Ranjan A, Vanninathan M.*Lectures on the finite element method*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1975.

Coddington E A. *An introduction to ordinary differential equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1961.

Coddington E A, Levinson N. *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.

Collatz L. *The numerical treatment of differential equations*, 3rd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1960.

Collatz L. *Differential equations: an introduction with applications*, Wiley, New York, 1986.

Colton D L. *Partial differential equations in the complex domain*, Pitman, San Francisco, 1976.

Coppel W A. *J. B. Fourier — on the occasion of his two-hundredth birthday*, Amer. Math. Monthly **76** (1969), 468～483.

Copson E T. *Partial differential equations* , Cambridge Univ. Press, New York, 1975.

Cordes H O. *Spectral theory of linear differential operators and comparison algebras*, Cambridge Univ. Press, New York, 1987.

Courant R, Hilbert D. *Methods of mathematical physics,* Vols. I and II, Interscience Publishers, New York, 1953.

Craig I J, Brown J C. *Inverse problems in astronomy: a guide to inversion strategies for remotely sensed data*, Adams Hilger Ltd, Bristol and Boston, 1986.

Cryer C W. *Numerical functional analysis*, Clarendon Press, Oxford, 1982.

Csordas G, Varga R S. *Comparisons of regular splittings of matrices*, Numer. Math. Vol. **44** (1984), 23～35.

D

Davies E B. *Heat kernels and spectral theory*, Cambridge Univ. Press, New York, 1989.

Davis H F. *Fourier series and orthogonal functions*, Allyn and Bacon, Boston, 1963.

Davis J L. *Wave propagation in solids and fluids*, Springer-Verlag, New York, 1988.

Deans S R. *The radon transform and some of its applications*, Wiley, New York, 1983.

Debnath L. *Nonlinear waves* , Cambridge Univ.Press, New York, 1983.

De Luca L J, Sedlock J T. *Calculus: a first course*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1973.

Dennemeyer R. *Introduction to partial differential equations and boundary value problems*, McGraw-Hill, New York, 1968.

Dezin A A. *Partial differential equations: an introduction to a general theory of linear boundary value problems*, Springer-Verlag, New York, 1987.

Diaz J I. *Nonlinear partial differential equations and free boundaries*, Pitman, Boston, 1985.

Dodziuk J. *Eigenvalues of the Laplacian and the heat equation*, Amer. Math. Monthly **88** (1981), 686~695.

Doniach S, Sondheimer E H. *Green's functions for solid state physicists*, W. A. Benjamin, Reading, Mass., 1974.

Downing H H. *Sums of sines converted into numerical sums*, Amer. Math. Monthly **56** (1949), 630~631.

Driver R D. *Introduction to ordinary differential equations* , Harper & Row, New York, 1978.

Du Chateau P, Zachmann D. *Applied partial differential equations* , Harper & Row, New York, 1989.

Du Chateau P, Zachmann D. *Schaum's outline of theory and problems of partial differential equations* , McGraw-Hill, New York, 1986.

Duff G F D. *Partial differential equations* , Toronto Univ. Press, Toronto, 1956.

Duff G F D, Naylor D. *Differential equations of applied mathematics*, Wiley, New York, 1966.

Dunford N, Schwartz J T. *Linear operators* , Interscience Publishers, New York, 1958.

Dym H, Mckean H P. *Fourier series and integrals*, Academic Press, New York,

1972.

E

Ecomomou E N. *Green's functions in quantum physics*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1983.

Edwards H M. *Riemann's zeta function*, Academic Press, New York, 1974.

Edwards R E. *Fourier series, a modern introduction*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1979.

Eggermont P P B. *Noncentral difference quotients and the derivative*, Amer. Math. Monthly **95** (1988), 551~553.

Epstein B. *Partial differential equations* , McGraw-Hill, New York, 1962.

Evans L C. *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations,* American Mathematical Society, Providence, R.I., 1990.

F

Fattorini H O. *Second order linear differential equations in Banach spaces*, North-Holland, New York, 1985.

Farlow S J. *Partial differential equations for scientists and engineers*, Wiley, New York, 1982.

Feineman G, Garrett S J, Karaus A D. *Applied differential equations* , Spartan Books, Washington, 1965.

Feller W. *An introduction to probability theory and its application*, vol II, 3rd ed., Wiley, New York, 1967.

Forsythe G E. *Numerical analysis and partial differential equations*, Wiley, New York, 1958.

Forsythe G E, Wasow W R. *Finite-difference methods for partial differential equations*, Wiley, New York, 1960.

Fox L. *An introduction to numerical linear algebra, with exercises*, Oxford Univ. Press, New York, 1965.

Franklin P. *An introduction to Fourier methods and the Laplace transformation,* Dover, New York, 1958.

Friedman A. *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.

Friedman A. *Variational principles and free-boundary problems*, Wiley, New York, 1982.

Friedman A. *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964

Fulks W. *Advanced calculus*, 2nd ed., Wiley, New York, 1969.

G

Garabedian, P. *Partial differential equations*, Wiley, New York, 1964.

Gilbarg D, Trudinger N S. *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, New York, 1977.

Gilbert R P. *Constructive methods for elliptic equations* , Springer-Verlag, New York, 1974.

Gilbert R P. *Function theoretic methods in partial differential equations*, Academic Press, New York, 1969.

Gilkey P B. *The index theorem and the heat equation*, Publish or Perish, Inc., Boston, 1974.

Glowinski R. *Numerical methods for nonlinear variational problems*, Springer-Verlag, New York, 1984.

Glowinski R, Lions J L, Tremolieres R. *Numerical analysis of variational inequalities*, North-Holland, New York, 1981.

Goffman C, Waterman D. *Some aspects of Fourier series*, Amer. Math. Monthly **77** (1970), 119~133.

Golomb M, Shanks M E. *Elements of ordinary differential equations*, 2nd ed, McGraw-Hill, New York, 1965.

Golub G H, Van Loan C F. *Matrix computations*, Johns Hopkins Univ. press, 1983.

Good I J. *Analogues of Poisson's summation formula*, Amer. Math. Monthly **69**(1962), 259~266.

Graham A. *Nonnegative matrices and applicable topics in linear algebra*, Halsted Press, New York, 1987.

Greenberg M D. *Foundations of applied mathematics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1978.

Greenberg M D. *Advanced engineering mathematics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1988.

Groetsch C W. *Generalized inverses of linear operators: representation and approximation*, Dekker, New York, 1977.

Grosswald E. *Bessel polynomials*, Springer-Verlag, New York, 1978.

Guenther R B. *Partial differential equations of mathematical physics and integral equations*, Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, N.J., 1988.

Gustafson K E. *Introduction to partial differential equations and Hilbert space methods*, 2nd ed., Wiley, New York, 1987.

H

Haberman R. *Mathematical models: mechanical vibrations, population dynamics, and traffic flow: an introduction to applied mathematics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1977.

Haberman R. *Elementary applied partial differential equations: with Fourier series and boundary value problems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1983.

Hackbusch W. *Multi-grid methods and applications*, Springer-Verlag, New York, 1985.

Hagin F. *A first course in differential equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1975.

Hardy G H. *A Theorem concerning Fourier transforms*, J.London Math. Soc., **8** (1933), 227~231.

Hardy G H, Rogosinski W W. *Fourier series*, Cambridge Tracts no. 38, Cambridge Univ. Press, New York, 1950.

Harris S. *An introduction to the theory of the Boltzman equation*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1971.

Hartman P. *Ordinary differential equations* 2nd ed., Birkhauser, Boston, 1982.

Hellwig G. *Partial differential equations: an introduction*, 2nd ed., Blaisdell Pub. Co., New York, 1977.

Henrici P. *Applied and computational complex analysis,* vols.1, 2 and 3, Wiley,

New York, 1974.

Henrici P. *Error propagation for difference methods*, Wiley, New York, 1963.

Henrici P. *Elements of numerical analysis*, Wiley, New York, 1964.

Higgins J R. *Five short stories about the cardinal series*, Bull. Amer. Math. Soc.(New Series), **12**, (1985), 45~89.

Hildebrand F B. *Advanced calculus for applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.

Hildebrand F B. *Introduction to numerical analysis*, McGraw-Hill, New York, 1956.

Hlavacek I. *Solution of variational inequalities in mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1988.

Hochstadt H. *Special functions of mathematical physics*, Holt, Reinhart and Winston, New York, 1961.

Hodge P G. *On the method of characteristics*, Amer. Math.Monthly **57** (1950), 621~623.

Hoffman S P. *Advanced calculus* , Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1970.

Holzapfel R. *Geometry and arithmetic around Euler partial differential equations*, Kluwer Academic, Boston, 1986.

Holbrook J G. *Laplace transforms for electrical engineers*, 2nd rev.ed., Pergamon Press, New York, 1966.

Hormander L. *The analysis of linear partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

Hornbeck R W. *Numerical methods*, Quantum Publishers, New York, 1975.

Householder A S. *Principles of numerical analysis*, McGraw-Hill, New York, 1953.

Huntley I, Johnson R M. *Linear and nonlinear differential equations*, Halsted Press, New York, 1983.

Hunzeker H L. *The separation of partial differential equations with mixed derivatives*, Amer. Math. Monthly **68** (1961), 131~134.

Hurewicz W. *Lectures on ordinary differential equations*, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1958.

I

Ince E L, Sneddon I N. *The solution of ordinary differential equations*, 2nd ed., Wiley, New York, 1987.

Isaacson E, Keller H B. *Analysis of numerical methods*, Wiley, New York, 1966.

J

John F. *Lectures on advanced numerical analysis*, Gordon and Breach, New York, 1967.

John F. *Partial differential equations*, 4th ed., Springer-Verlag, New York, 1982.

Jordan D W, Smith P. *Nonlinear ordinary differential equations*, 2nd ed., Oxford Univ. Press, Oxford, 1987.

Jordan K. *Calculus of finite differences* 3rd ed., Chelsea Pub. Co., New York, 1965.

K

Kac M. *Can one hear the shape of a drum?*, Amer. Math.Monthly **73S**(1966), 1~23.

Kaplan W. *Advanced calculus* , Addison-Wesley, Reading, Mass., 1952.

Keller H B. *Numerical methods for two-point boundary-value problems*, Blaisdell Pub.Co., Waltham, Mass., 1968.

Kellner R. *On a theorem of Pólya*, Amer. Math.Monthly **73**(1966), 856~858.

Kelman R B. *Regularity of certain explicit solutions to Laplace's equation at artificial interfaces*, Amer. Math.Monthly **73**(1966), 1073~1078.

Kober H. *Dictionary of conformal representations* 2nd ed., Dover, New York, 1957.

Konig M. *Schauder's estimates and boundary value problems for quasilinear partial differential equations*, Presses de L'Universite de Montreal, Montreal, 1985.

Kovach L D. *Boundary-value problems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1984.

Krein M G, Gohberg I. *Topics in differential and integral equations and operator*

theory, Birkhauser Verlag, Boston, 1983.

Krylov N V. *Nonlinear elliptic and parabolic equations of the second order*, Kluwer Academic, Boston, 1987.

Krzyzanski M. *Partial differential equations of second order* (trans., H.Zorski), Polish Scientific Publishers, Warszawa PWN, 1971.

Kunz K S. *Numerical analysis*, McGraw-Hill, New York, 1957.

L

Ladyzhenskaia O. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Translations of mathematical monographs, v.23, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.

Laforgia A, Muldoon M E. *Some consequences of the Sturm comparison theorem*, Amer. Math. Monthly **93** (1986), 89～94.

Lang S.*Differential manifolds*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1972.

Lapidus L, Schiesser W E. *Numerical methods for differential systems: recent developments in algorithms, software, and applications*, Academic Press, New York, 1976.

Lax P D, Phillips R S. *Scattering theory*, rev.ed., Academic Press, Boston, 1989.

Lax P D. *Numerical solution of partial differential equations*, Amer. Math. Monthly **72S**(1965), 74～84.

Lebedev N N, Silverman R A. *Special functions and their applications*, rev. English ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.

Leighton W. *Ordinary differential equations*, 2nd ed., Wadsworth, Belmont, Calif., 1966.

Leis R. *Partial differential equations of applied mathematics*, Wiley, New York, 1983.

Leis R. *Initial value boundary problems in mathematical physics*, Wiley, New York, 1986.

Le Page W R. *Complex variables and the Laplace transform for engineers*, McGraw-Hill, New York, 1961.

Leung A W. *Systems of nonlinear partial differential equations: applications to biology and engineering*, Kluwer Academic, Boston, 1989.

Levitan B M, Sargsjan I S. *Sturm-Liouville and Dirac operators*, Kluwer Academic, Boston, 1989.

Lewin J W. *A truly elementary approach to the bounded convergence theorem*, Amer. Math. Monthly **93**(1986), 395~397.

Lewin J W. *Some applications of the bounded convergence theorem for an introductory course in analysis*, Amer.Math. Monthly **94**(1987), 988~993.

Lewin J W. *An introduction to mathematical analysis*, McGraw-Hill, New York, 1988.

Lieberstein H M. *Theory of partial differential equations*, Academic Press, New York, 1972.

Lions J L, Magenes E. *Non-Homogeneous boundary-value problems and applications*, Springer-Verlag, New York, 1972.

Lomen D, Mark J. *Ordinary differential equations with linear algebra*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1986.

Loomis L H, Sternberg S. *Advanced calculus* , Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968.

M

Magnus W, Winkler S. *Hill's equation* Interscience Publishers, New York, 1966.

Martin W T, Reissner E. *Elementary differential equations* , 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1961.

Mathews J H. *Basic complex variables for mathematics and engineering*, Allyn and Bacon, Boston, 1982.

Mathews J, Walker R L. *Mathematical methods of physics*, W.A. Benjamin, New York, 1964.

McShane E J. *The Fourier transform and mean convergence*, Amer.Math. Monthly **68**(1961), 205~211.

Michel A N. *Ordinary differential equations*, Academic Press, New York, 1982.

Mikhlin S G. *Linear equations of mathematical physics* , Holt, Rinehart and Winston, New York, 1967.

Miles E P, Williams E. *A basic set of polynomial solutions for the Euler-Poisson-Darboux and Beltrami equations*, Amer. Math. Monthly **63**(1956), 401~404.

Miller K S. *Advanced complex calculus* , Harper, New York, 1960.

Miller K S. *Partial differential equations in engineering problems*, Prentice-Hall, New York, 1953.

Miller R K, Michel A N. *Ordinary differential equations* , Academic Press, New York, 1982.

Milne W E. *Numerical calculus: approximations, interpolation, finite differences, numerical integration and curve fitting*, Princeton University Press, Princeton, 1949.

Milne W E. *Numerical solution of differential equations*, Wiley, New York, 1953.

Mitchell A, Wait R. *The finite element method in partial differential equations*, Wiley, New York, 1977.

Mitchell A R. *Computational methods in partial differential equations*, Wiley, New York, 1969.

Moon P H, Spencer D E. *Partial differential equations*, D. C. Heath, Lexington, Mass., 1969.

Myint-U T, Debnath L. *Partial differential equations for scientists and engineers*, North-Holland, New York, 1987.

N

Nirenberg L. *Lectures on linear partial differential equations*, Regional conference series in mathematics, no. 17, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1972.

Noble B, Daniel J W. *Applied linear algebra*, 3rd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1988.

Noye J. *Computational techniques for differential equations* (North-Holland Mathematics Studies 83), North-Holland, New York, 1984.

O

Olmsted J M H. *Advanced calculus* , Appleton-Century-Crofts, New York, 1961.

Ortega J M. *Numerical analysis; a second course*, Academic Press, New York, 1972.

Ortega J M, Rheinboldt W C. *Iterative solutions of nonlinear equations in several variables*, Academic Press, New York, 1970.

Osserman R. *The isoperimetric inequality*, Bull. Amer.Math. Soc., **84**(1978), 1182~1238.

Osserman R, Weinstein A, eds. *Geometry of the Laplace operator*, Proceedings of symposia in pure mathematics, *v*, XXXVI, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1980.

P

Palais R S. *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1965.

Papoulis A. *The Fourier integral and its applications*, McGraw-Hill, New York, 1962.

Paris R B, Wood A D. *Asymptotics of high order differential equations*, Wiley, New York, 1986.

Payne L E. *Improperly posed problems in partial differential equations*, Regional conference series in applied mathematics, 22, Society for industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1975.

Pearson C E. *Numerical methods in engineering and science*, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1986.

Peek R L. *Flow of heat in a disk heated by a gas stream*, Amer.Math. Monthly **39**(1932), 276~280.

Pinsky M A. *Introduction to partial differential equations with applications*, McGraw-Hill, New York, 1984.

Pólya G. *Collected Papers, Vol II, Location of zeros*, (R.P. Boas, Ed.), MIT Press, Cambridge, 1974.

Pólya G, Szegö G. *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Princeton University Press, Princeton, 1951.

Prenter P M. *Splines and variational methods*, Wiley, New York, 1975.

Protter H M. *The characteristic initial value problem for the wave equation and Riemann's method*, Amer.Math. Monthly **61**(1954), 702~705.

Protter H M, Morrey C B. *College calculus with analytic geometry*, 3rd ed.,

Addison-Wesley, Reading, Mass., 1977.

Protter M H, Weinberger H F. *Maximum principles in differential equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1967.

R

Rabenstein A L. *Introduction to ordinary differential equations*, Academic Press, New York, 1972.

Radon J. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, Ber. Sächs.Ges.Wiss.Leipzig, **69**(1917), 262～267.

Rainville E D. *Intermediate differential equations* , 2d ed., Macmillan, New York, 1964.

Rainville E D. *Special functions* , Macmillan, New York, 1960.

Rainville E D. *The Laplace transform: an introduction*, Macmillan, New York, 1963.

Rainville E D, Bedient P E. *Elementary differential equations* , 4th ed., Macmillan, 1969.

Reid W T. *Ordinary differential equations* , Wiley, New York, 1971.

Reissig R, Sansone G, Conti R. *Non-linear differential equations of higher order*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1974.

Rheinboldt W C. *Numerical analysis of parameterized nonlinear equations*, Wiley, New York, 1986.

Rhoades B E. *On forming partial differential equations* , Amer.Math. Monthly **66**(1959), 473～476.

Richtmyer R D. *Difference methods for initial-value problems*, Interscience Publishers, New York, 1957.

Roach G F. *Green's functions*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, New York, 1982.

Rogers C, Shadwick W F. *Backlund transformations and their applications*, Academic Press, New York, 1982.

Roseau M. *Asymptotic wave theory*, American Elsevier Pub. Co., New York, 1976.

Rosenberg von, D U. *Methods for the numerical solution of partial differential*

equations, American Elsevier Pub. Co., New York, 1969.

Ross S L. *Differential equations*, 1st ed., Blaisdell, New York, 1964.

Royden H L. *Real analysis*, 2nd ed., Macmillan, New York, 1968.

Rozhdestvenskii B L, IAnenko N N. *Systems of quasilinear equations and their application to gas dynamics*, 2nd ed., American Mathematical Society, Providence, R.I., 1983.

Rubinstein Z. *A course in ordinary and partial differential equations*, Academic Press, New York, 1969.

Rudin W. *Functional analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1973.

Rudin W. *Principles of mathematical analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1976.

Rudin W. *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, New York, 1987.

S

Sagan H. *Boundary and eigenvalue problems in mathematical physics*, Wiley, New York, 1961.

Sakamoto R. *Hyperbolic boundary value problems*, Cambridge Univ. Press, New York, 1982.

Salas S L, Hille E, Anderson J T. *Calculus: one and several variables, with analytic geometry*, 5th ed., Wiley, New York, 1986.

Salkover M. *The homogeneous linear differential equation with constant coefficients*, Amer.Math. Monthly **37**(1930), 524~529.

Schechter M. *Operator methods in quantum mechanics*, North-Holland, New York, 1981.

Schechter M. *Modern methods in partial differential equations: an introduction*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1977.

Scheid F J. *Schaum's outline of theory and problems of numerical analysis*, McGraw-Hill, New York, 1968.

Schiff L I. *Quantum mechanics*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1968.

Schultz M.*Spline analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1973.

Scott E J. *Determination of the Riemann function*, Amer.Math.Monthly **80** (1973), 906~909.

Seeley R T. *An introduction to Fourier series and integrals*, W.A. Benjamin, 1966.

Seeley R T. *Calculus of several variables*, Scott, Foresman, Glenview, III., 1970.

Sewell G. *The numerical solution of ordinary and partial differential equations*, Academic Press, Boston, 1988.

Silverman R A. *Modern calculus and analytic geometry*, Macmillan, New York, 1969.

Simmons G F. *Differential equations, with applications and historical notes*, McGraw-Hill, New York, 1972.

Smith G D. *Numerical solution of partial differential equations:finite difference equations*, 3rd ed., Oxford University Press, Oxford, 1985.

Smoller J A, ed. *Nonlinear partial differential equations*, Contemporary mathematics, v.17, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1983.

Sneddon I N. *Fourier transforms* , McGraw-Hill, New York, 1951.

Sneddon I N. *Elements of partial differential equations* , McGraw-Hill, New York, 1957.

Sneddon I N. *Special functions of mathematical physics and chemistry*, 3rd ed., Longman, London, 1980.

Sobolev S L. *Partial differential equations of mathematical physics*, Addision-Wesley, Reading, Mass., 1964.

Sod G A. *Numerical methods in fluid dynamics: initial and initial boundary-value problems*, Cambridge University Press, New York, 1985.

Spain B. *Ordinary differential equations*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1969.

Sperb R P. *Maximum principles and their applications*, Academic Press, New York, 1981.

Spivak M. *Calculus on manifolds: a modern approach to classical theorems of advanced calculus*, Benjamin and Cummings Pub. Co., Menlo Park, Calif., 1965.

Stakgold I. *Green's functions and boundary value problems*, Wiley, New York, 1979.

Sternberg W J. Smith T L. *The theory of potential and spherical harmonics*, 2nd ed., Univ. of Toronto, Toronto, 1952.

Strang G. *Linear algebra and its applications*, 2nd ed., Academic Press, New York, 1980.

T

Taira K. *Diffusion processes and partial differential equations*, Academic Press, Orlando, 1988.

Taylor A E. *Calculus, with analytic geometry*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1959.

Taylor A E, Mann W R. *Advanced calculus*, 2nd ed., Xerox College Pub., Lexington, Mass., 1972.

Temam R. *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*, Rev.ed., North-Holland, New York, 1979.

Thomas G B, Finney R L. *Calculus and analytic geometry*, 6th ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1984.

Titchmarsh E C. *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations*, vols.1and 2, Clarendon Press, Oxford, 1946(vol.1, 2nd ed., 1962).

Titchmarsh E C. *Introduction to the theory of Fourier integrals*, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford, 1967.

Titchmarsh E C. *The theory of functions*, 2nd ed., Oxford Univ. Press, 1939.

Treves F. *Basic linear partial differential equations*, Academic Press, New York, 1975.

Treves F. *Applications of distributions to pde theory*, Amer.Math. Monthly **77**(1970), 241~248.

V

Varga R S. *Matrix iterative analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.

Vemuri V, Karplus Walter J. *Digital computer treatment of partial differential equations*, Englewood Cliffs, N.J., 1981.

Vichnevetsky R. *Computer methods for partial differential equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1981.

W

Warner F. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Scott, Foresman and Co., Glenview, III., 1971.

Watson E J. *Laplace transforms and applications*, Van Noststrand Reinhold, New York, 1981.

Watson G N. *A treatise on the theory of Bessel functions*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966.

Watson N A. *Parabolic equations on an infinite strip*, Dekker, New York, 1989.

Webster A G. *Partial differential equations of mathematical physics*, 2nd corr. ed., Dover, New York, 1966.

Weinberger H F. *A first course in partial differential equations with complex variables and transform methods*, 1st ed., Blaisdell, New York, 1965.

Wells C P. *Separability conditions for some self-adjoint partial differential equations*, Amer.Math. Monthly **66**(1959), 684~689.

Whittaker E T. *A course of modern analysis*, 4th ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1963.

Widder D V. *Advanced calculus*,2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1961.

Widder D V. *The Laplace transform*, Princeton University Press, Princeton, 1941.

Widder D V. *An introduction to transform theory*, Academic Press, Pure and Appl.Math., vol.42, New York, 1971.

Widder D V. *The heat equation*, Academic Press, Pure and Appl.Math., vol.67, New York, 1975.

Wilf H S. *Mathematics for the physical sciences*, Wiley, New York, 1962.

Wilker J B. *The nth derivative as a limit* , Amer.Math. Monthly **94**(1987), 354~356.

Williams W E. *Partial differential equations*, Clarendon Press, New York, 1980.

Williamson R E. *Introduction to differential equations:ODE, PDE, and series*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1986.

Wimp J. *Sequence transformations and their applications*, Academic Press, New York, 1981.

Witten M. *Hyperbolic partial differential equations*, Pergamon Press, New York,

1983.

Wloka J. *Partial differential equations*, Cambridge Univ. Press, New York, 1987.

Y

Young E C. *Partial differential equations; an introduction*, Allyn and Bacon, Boston, 1972.

Young D M. *Iterative solution of large linear systems*, Academic Press, New York, 1971.

Z

Zachmanoglou E C, Thoe D W. *Introduction to partial differential equations with applications*, The Williams and Wilkins Co., Baltimore, 1976.

Zauderer E. *Partial differential equations of applied mathematics*, Wiley, New York, 1983.

Zienkiewicz O C. *The finite element method*, 3rd ed., McGraw-Hill(UK), London, 1977.

Zuily C. *Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem*, Birkhauser Verlag, Boston, 1983.

Zygmund A, *Trigonometric series*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, New York, 1959.



部分答案

练习 1.1

1. (a) $y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$, (c) $\arctan y = \frac{1}{3}(x^3 - 3x) + C$,
   (e) $Cx - x\cos t = 1$, (g) $(t-1)e^t + e^{-x} = C$, (i) $T(t) = Ce^{-3t}$.
3. 2分钟.
4. (a) $y = \frac{1}{3}e^{-2x}(e^{3x} + 2)$, (c) $y = 2\sin x \ln|\sin x|$,
   (e) $y = (2x+1)e^{-x^2}$, (g) $x = 100e^{-\sin t}$, (i) $x = (2t+100)^{-\frac{2}{3}}$.
6. (a) $y = c_1 x + c_2$, (c) $y = c_1\cos(x\sqrt{3}) + c_2\sin(x\sqrt{3})$,
   (e) $y = c_1 e^{3x} + c_2$, (g) $y = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{-2x}$, (i) $y = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$.
7. (a) $y = e^{2t}$, (c) $y = a\cos t + b\sin t$, (e) $y = \frac{5}{3}e^{-\frac{4}{5}t}\sin(\frac{3}{5}t)$.
13. $\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
15. $x(t) = e^t\cos t,\ y(t) = -e^t\sin t$. 图像以顺时针方式螺旋式移离原点.
17. (a) $x(t) = (1-2t)e^t$, $y(t) = (1-t)e^t$.
    (c) $x(t) = \frac{4}{\sqrt{33}}e^{\frac{5}{2}t}\sinh(\frac{\sqrt{33}}{2}t)$, $y(t) = \frac{3}{\sqrt{33}}e^{\frac{5}{2}t}\big(\sinh(\frac{\sqrt{33}}{2}t) + \frac{\sqrt{33}}{3}\cosh(\frac{\sqrt{33}}{2}t)\big)$.

练习 1.2

5. (a) 三阶, 线性, 齐次;
   (b) 一阶, 非线性;
   (c) 四阶, 线性, 非齐次;

(d) 二阶, 非线性;

(e) 二阶, 线性, 齐次.

7. (a) $u(x,y)=x^2+2xy-y^2$.

8. (b) $n-1$.

(c) n 越大, 热区域和冷区域就越靠近, 且这些区域之间的温度梯度越大.

9. (c) $(m+1)(n+1)(p+1)$ 个内室.

11. (b) $u(x,t)=\cos(\pi at)\sin(\pi x)+\frac{2}{3\pi a}\sin(3\pi at)\sin(3\pi x)$,

$v(x,t)=\cos(\pi at)\sin(\pi x)+\frac{1}{3\pi a}\sin(3\pi at)\sin(3\pi x)$.

13. (a) $u(x,y)=\frac{1}{2}Cx^2+\frac{1}{6}Ax^3+\frac{1}{6}By^3$.

(b) 令 $v(x,y)=u(x,y)+h(x,y)$, 其中 $h(x,y)$ 是 Laplace 方程无穷多个解中的任一个解.

18. $\mathbf{A}^{-1}=\frac{d}{dx}+p(x)$.

练习 1.3

1. (a) $u(x,y)=x^3+y^2x+f(y),\ f\in C^1$.

(c) $u(x,y,z)=f(x,y)+g(x,y)+h(x,z),\quad f,g$ 和 $h\in C^1$.

2. (a) $u(x,y)=f(y)e^{2x},\quad f\in C^1$.

(c) $u(x,y)=e^{-x^2}(2ye^{x^2}+f(y)),\quad f\in C^1$.

(e) $u(x,y)=f(x)e^{xy}+g(x)e^{-xy},\quad f$ 和 $g\in C^2$.

3. (a) $u(x,y)=ye^{2x}$

(c) $u(x,y)=2y(1-e^{y^2-x^2})$

(e) $u(x,y)=\cosh(xy)$.

4. 下面的解不是唯一的可能解.

(a) $u(x,y)=e^{-2\lambda^2 t}(c_1\cos(\lambda x)+c_2\sin(\lambda x))$,

(c) $u(x,y)=(c_1e^{\lambda x}+c_2e^{-\lambda x})(d_1e^{4\lambda t}+d_2e^{-4\lambda t})$,

(e) $u(x,y,z)=e^{z\sqrt{a^2+b^2}}\cos(ax)\cos(by)$.

5. 如果 $\lambda=0$, 则 $u(x,t)=(c_1x+c_2)e^{-t}$.

如果 $\lambda>0$, 则 $u(x,t)=(c_1e^{x\sqrt{\lambda}}+c_2e^{-x\sqrt{\lambda}})e^{(\lambda-1)t}$.

如果 $\lambda=\mu^2$, 则 $u(x,t)=(c_1e^{x\mu}+c_2e^{-x\mu})e^{(\mu^2-1)t}$.

6. (a) $u(x,y)=\exp(x+r(2y-3x))$.

(c) $u(x,y)=\exp\left(\frac{x}{rs}+ry+sz\right),\ rs\neq 0$.

(e) $u(x,y)=\exp\left(rx+y\sqrt{1-r^2}\right)$.

8. 只有比 $\frac{a}{b}$ 是唯一确定的. 因此, 以下的答案不是唯一的.

(a) $u(x,y)=f(2x-y)$.

(c) $u(x,y)=f(dx-cy)$.

9. (a) $u(x,y)=x-\frac{1}{2}y$.

(c) $u(x,y)=\frac{1}{49}\big((3y+4x)^2-7(3y+4x)\big)$.

练习 2.1

1. 在下面每个解中, f 是任意 C^1 函数.

(a) $u(x,y)=f(3x+2y)+\frac{1}{4}x^2$; (c) $u(x,y)=-e^{x+y}+e^{2y}f(2x-y)$;

(e) $v(w,z)=w^2+f(3z-w)$.

2. (a) $u(x,y)=-e^{x+y}+\big(e^{x-\frac{1}{2}y}+\sin((x-\frac{1}{2}y)^2)\big)e^{2y}$.

(c) $u(x,y)=-e^{x+y}+\big(\frac{2}{3}(x-\frac{1}{2}y)+1\big)e^{\frac{4}{3}(x-\frac{1}{2}y)}e^{2y}$.

4. 函数 $g(x)$ 必具有形式 $-1+ke^x$, k 为某个常数. 如果 $g(x)$ 具有该形式, 原问题有无穷多个解. 只要 $C(0)=k$ 且 C 是 C^1 的, 形如 $u(x,y)=-1+C(y-3x)e^x$ 的任一函数都是解.

5. 有无穷多个解. 这些解中的两个解是

$$u(x,y)=-1+2\cos(y-3x)e^x \quad 和 \quad u(x,y)=-1+2e^{y-3x}e^x=-1+2e^{y-2x}.$$

6. $u(x,y)=(y+2x)^2$.

7. 两人的答案都对. 注意到 $e^{-cy/b}=e^{-cx/a}e^{c(bx-ay)/ab}$.

12. (a) 由 (26), 得 $P_\infty(y)=C\exp(-\int_0^y 0.1dy)=Ce^{-y/10}$.

(b) 最终仍在货架上鳄梨的数目是 $\int_0^\infty P_\infty(y)dy=10C$. 因此, $C=30$. 由于每天大约取走 30 个, 故自然每天需要获得大约 30 个.

练习 2.2

1. 在下面每个答案中, C 是任意 C^1 函数.

(a) $u(x,y)=C(\frac{x^2}{y})$. (c) $u(x,y)=xC(ye^x)$.

2. (a) $u(x,y)=(\frac{x^2}{y})^{\frac{1}{3}},\ y>0$ (c) $u(x,y)=xye^x$.

3. (a) $X(s,t)=se^t$, $Y(s,t)=e^{2t-s}$, $U(s,t)=\sin s$.

(c) $X(s,t)=s^2e^t$, $Y(s,t)=s\exp(s^2(1-e^t))$, $U(s,t)=s^3e^t$.

7. 对 $x\leqslant 0$ 令 $u(x,y)=0$, 对 $x\geqslant 0$ 令 $u(x,y)=yx^2$. 注意到 $u(x,y)\neq C(yx^2)$, 因对 x 和 $y\neq 0$, $u(-x,y)\neq u(x,y)$.

8. (d) $u(x,y)=f_n((-1)^n y\sin x)$, $n\pi\leqslant x\leqslant n\pi+\pi$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

练习 2.3

1. $u(x,y,z)=(x^2+y^2+2z^2-2yz-2xz)e^x$.
2. (a) $u(x,y,z)=z+\big((x+y)^2e^z-z\big)e^{-x}$.
   (c) 通解是 $u(x,y,z)=z+C(x+y,z)e^{-x}$. 因此,

$$\begin{aligned}u(x,y,x+y)&=(x+y)+e^y\Rightarrow x+y+C(x+y,x+y)e^{-x}\\&=(x+y)+e^y\Rightarrow C(x+y,x+y)=e^{x+y}.\end{aligned}$$

因此, 只需选择 C, 使得 $C(r,r)=e^r$. 考虑 $C(r,s)=e^rf(s-r)$, 其中 f 是任意满足 $f(0)=1$ 的 C^1 函数.

3. (a) $u(x,y,z,t)=f(x+t,y+2t,z-t)$.
   (b) $u(x,y,z,t)=(x+t)^2+(y+2t)^2+(z-t)^2$.
   (c) $(-t,-2t,t)$.
4. (a) $u(x,y,z)=C(x\cos z+y\sin z,y\cos z-x\sin z)$, 其中 C 是任意两个变量的 C^1 函数.
6. (a) $C(x-u^2,y-u^2)=0$(可能有其他等价的答案.)
   (b) $u(x,y)=\sqrt{2x-y+1},\ 2x-y+1>0$.
7. (a) $C(xy,u^2-x^2)=0$.
   (b) $u(x,y)=x\sqrt{x^2y^4+2y^2+1}$.
12. (b) $t=\tau,\ x=\big(V(s)+sV'(s)\big)\tau+s,\ \rho=f(s)$.
15. (a) $x(t)=-c_0\frac{2(\alpha t+1)}{(\gamma-1)\alpha}+C\big(1+\frac{1}{2}(\gamma+1)\alpha t\big)^{\frac{2}{\gamma+1}}$, 其中 $C=x(0)-c_0\frac{2}{(\gamma-1)\alpha}$.

练习 3.1

3. (a) $u(x,t)=4e^{-(2\pi/3)^22t}\sin\frac{2\pi x}{3}-e^{-(5\pi/3)^22t}\sin\frac{5\pi x}{3}$.
   (c) $u(x,t)=\frac{3}{4}e^{-2(\pi/3)^2t}\sin\frac{\pi x}{3}-\frac{1}{4}e^{-2\pi^2t}\sin(\pi x)$.
   (e) $u(x,t)=6e^{-128\pi^2t/9}\sin\frac{8\pi x}{3}+e^{-50\pi^2t}\sin(5\pi x)$.
6. (a) $u(x,t)=5e^{-t}\cos x+3e^{-64t}\sin(8x)$.
   (c) $u(x,t)=\frac{1}{2}(9+e^{-36t}\cos(6x))$.
   (e) $u(x,t)=\frac{1}{2}(5+3e^{-4t}\cos(2x)+4e^{-4t}\sin(2x))$.
9. (c) $u(x,t)=e^{-ht}\sum_{n=1}^{N}b_ne^{-(n\pi/L)^2kt}\sin\frac{n\pi x}{L}$.

练习 3.2

4. 令 $f(x)=5\sin(3x)-3\sin(5x)$. 则当 $x=0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi$ 时 $f'(x)=15\cos(3x)-15\cos(5x)=30\sin(4x)\sin x=0$. 现 $f(0)=f(\pi)=0,\ f(\frac{\pi}{4})=f(\frac{3\pi}{4})=5\sqrt{2}/2+$

$3\sqrt{2}/2 = 4\sqrt{2}$, 而 $f(\frac{\pi}{2}) = -8$. 因此, 由最大值最小值原理, 得 $-8 \leqslant u(x,t) \leqslant 4\sqrt{2}$.

练习 3.3

3. (b) $u(x,t) = \sum_{n=0}^{N} c_n \exp\left(-\frac{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 kt}{L^2}\right) \sin \frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}$.
4. $u(x,t) = u_p(x,t) + v(x,t) = x - 1 + e^{-9\pi^2 t/2} \sin \frac{3\pi x}{2}$.
5. $u(x,t) = u_p(x,t) + v(x,t) = \frac{1}{20}x^2 + 2x + \frac{1}{2}t + e^{-5\pi^2 t}\cos(\pi x)$.
7. $u(x,t) = 4 - 2\pi + 2x + 7e^{-9t/4}\cos\frac{3x}{2}$.

练习 3.4

1. (b) $u(x,t) = \frac{1}{18}(1 - e^{-18t})\sin(3x)$.
3. $u(x,t) = e^{-9t}\sin(3x) + \sin t e^{-4t}\sin(2x)$.
5. (a) $w(x,t) = \frac{(b-a)x^2}{2L} + ax + \frac{(b-a)k}{L}t + \int h(t)dt$.
7. $u(x,t) = (e^t - t^2)\frac{x}{\pi} + t^2 + e^{-4t}\sin(2x) + (t - 1 + e^{-t})\sin x$.
9. $u(x,t) = t(x - x^2 + e^{-4\pi^2 t}\cos(2\pi x))$.

练习 4.1

2. (a) FS $f(x) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(4\pi x)$.
   (b) FS $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \sin x - \frac{1}{2}\cos(3x)$.
4. (a) FS $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}$.
7. (a) FS $f(x) = \frac{1}{\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi})\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos(nx) - n\sin(nx))\right)$.
8. FS $f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos(2x) + \frac{1}{3\cdot 5}\cos(4x) + \cdots\right)$.
9. (a) FS $f(x) = \frac{8}{15} - \frac{48}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\cos(n\pi x)$.
   (b) $N = 3243$.
   (c) $N = 6$.

练习 4.2

2. $f(x) = a(x^3 - L^2 x) + d$, 对任意常数 $a \neq 0$ 和 d.

练习 4.3

4. (a) FCS $f(x) = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{L}$.
   (b) FSS $f(x) = \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n=1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}$.
5. (a) FCS $f(x) = 1$　和 FSS $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{L}$.
   (b) FSS $f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-1}\sin(2kx)$ 和 FCS $f(x) = \cos x$.

8. (a) $u(x,t)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}e^{-n^2kt}\cos(nx)$.
9. (a) $u(x,t)=\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}e^{-(2m+1)^2\pi^2t}\sin((2m+1)\pi x)$.
10. (a) 形式解是 $u(x,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2})}{n+\frac{1}{2}}e^{-(n+\frac{1}{2})^2kt}\sin((n+\frac{1}{2})x)$.
11. $u(x,t)=x-1+4\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)\pi}-\frac{2(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2}\right)e^{-(n+\frac{1}{2})^2\pi^2kt}\sin((n+\frac{1}{2})\pi x)$.
12. $u(x,t)=\frac{kt}{10}+\frac{x^2}{20}+2x-\frac{35}{3}+20\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-3(-1)^n)}{\pi^2n^2}e^{-(n\pi/10)^2kt}\cos\frac{n\pi x}{10}$.

练习 4.4

1. (a) $\lambda_n=\frac{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}{L^2},\ y_n(x)=A_n\sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{L},\ n=1,2,3,\cdots$

   (c) $\lambda_n=\frac{(n-1)^2\pi^2}{L^2},\ y_n(x)=B_n\cos\frac{(n-1)\pi x}{L},\ n=1,2,3,\cdots$.

2. (a) $\lambda_1=-1,\ y_1(x)=A_1e^x$,

   $\lambda_n=(n-1)^2,\ y_n(x)=a_n\big(\sin((n-1)x)+(n-1)\cos((n-1)x)\big),\ n=2,3,4,\cdots$

   (c) $\lambda_n=(2n-1)^2\pi^2,\ y_n(x)=A_n\sin((2n-1)\pi x)+B_n\cos((2n-1)\pi x),\ n=1,2,3,\cdots$.

5. (b) $L\neq n\pi,\ n=1,2,3,\cdots$.
7. (a) $(xy')'+(\frac{x^2-m^2}{x})y=0,\ x>0$.

   (c) $(\sqrt{1-x^2}y')'+\frac{m^2}{\sqrt{1-x^2}}y=0,\ -1<x<1$.

14. (b) $y_n(x)=B_n\cos\frac{n\pi x}{L},\ z_n(x)=A_n\sin\frac{n\pi x}{L},\ A_n,B_n\neq 0,n\geqslant 1$.

练习 5.1

1. (a) $u(x,t)=3\cos\frac{\pi at}{L}\sin\frac{\pi x}{L}+\frac{L}{4\pi a}\sin\frac{2\pi at}{L}\sin\frac{2\pi x}{L}-\cos\frac{4\pi at}{L}\sin\frac{4\pi x}{L}$

   (c) $u(x,t)=\frac{L}{4\pi a}\sin\frac{\pi at}{L}\sin\frac{\pi x}{L}+\frac{L}{12\pi a}\sin\frac{3\pi at}{L}\sin\frac{3\pi x}{L}$.

3. (b) $u(x,t)=U(x)=-\frac{g}{2a^2}x(L-x)$, 此描绘一根悬弦.
6. (a) $u(x,t)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{(2k+1)^3}\cos((2k+1)t)\sin((2k+1)x)$, 其中 $N\geqslant 13$.

练习 5.2

1. (a) $\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2a})(x+at)^2+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2a})(x-at)^2$.

   (c) t.

   (e) $\sin(x+at)$.

4. $u(x,t)=\frac{1}{2}|x-at|^3+\frac{1}{2}|x+at|^3$.

练习 5.3

2. (a) $u(x,t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}(\cos(2at)-\frac{1}{2a}\sin(2at))\cos(2x)$.

(b) $u(x,t)=\frac{1}{2}(\cos^2(x+at)+\cos^2(x-at))+\frac{1}{2a}\big(at-\frac{1}{4}\sin(2(x+at))+\frac{1}{4}\sin(2(x-at))\big)$.

4. (a) $u(x,1)=0,\quad u(x,2)=-f(x),\quad u(x,3)=0,\quad u(x,4)=f(x)$.

5. (b) $\frac{a}{4L}$, 此为两个端点都是固定情形的最低频率 $\frac{a}{2L}$ 的一半.

6. $u(x,t)=\frac{4t^2}{\pi}+\frac{x^2}{\pi}-x+2\cos(6t)\cos(3x)+\frac{1}{2}\sin(2t)\cos x$.

7. $$u(x,t)=\frac{1}{1+a^2}\Big(e^{-t}\cos x+\frac{1}{2a}\big(\sin(x+at)-\sin(x-at)\big)-\frac{1}{2}\big(\cos(x+at)+\cos(x-at)\big)\Big).$$

9. $$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{9a^2-\omega^2}\big(\cos(\omega t)-\cos(3at)\big)\sin(3x), & \omega\neq 3a,\\ \frac{t}{6a}\sin(3at)\sin(3x), & \omega=3a\ (\text{共振}).\end{cases}$$

练习 6.1

2. (c) 在许多可能性之中, 考虑 x 和 $2x$. 更一般地, 考虑 x 和不具形式 $ay+b$ 的任意调和函数 $u(x,y)$ (参看 (b) 部分).

3. 对任意常数 a,b,c,A 和 B, 我们有乘积解 $(ax+b)(Ay+B),(ae^{cx}+be^{-cx})(A\sin(cy)+B\cos(cy))$ 和 $(ae^{cy}+be^{-cy})(A\sin(cx)+B\cos(cx))$. 因子 $(ae^{cx}+be^{-cx})$ 可用 $(\alpha\cosh(cx)+\beta\sinh(cx))$ 替换, 此通常是更有用的, 对 $(ae^{cy}+be^{-cy})$ 类似.

6. 在 Dirichlet 问题中, 稳态温度在金属板边界上每点的值是指定的, 而在 Neumann 问题中通过金属板边界的热能流量在沿着边界所有点是指定的.

7. (a) $q(x,y)$ 与在点 (x,y) 的单位面积热能生产率成比例.

(b) 要使存在稳态温度分布 $u(x,y)$, 在金属板内的热能生产率必须等于通过边界的热损失率.

练习 6.2

2. (a) $u(x,y)=\frac{9}{\sinh(8\pi M/L)}\sin\frac{8\pi x}{L}\sinh\frac{8\pi(M-y)}{L}$.

(b) $u(x,t)=\frac{1}{\sinh(\pi M/L)}\sin\frac{\pi x}{L}\sinh\frac{\pi y}{L}$.

3. $u(x,y)=\frac{1}{\sinh\pi}\big(\sinh(\pi-y)\sin x+\sinh y\sin x+\sinh(\pi-x)\sin y+\sinh x\sin y\big)$.

4. (a) $U(x,y)=x-y+2xy$.

(b) $u(x,y)=\frac{3}{\sinh\pi}\sin(\pi x)\sinh(\pi-\pi y)+\frac{1}{\sinh(2\pi)}\sin(2\pi y)\sinh(2\pi-2\pi x)+U(x,y)$.

5. (b) 四项 (参看例 5)

(c) 是, 对差应用最大值最小值原理.

7. (b) $u(x,y)=\frac{-\cos x\cosh(\pi-y)}{\sinh\pi}+\frac{\cos(2x)\cosh(2(\pi-y))}{2\sinh(2\pi)}+\coth\pi-\frac{1}{2}\coth(2\pi)$.

练习 6.3

1. (a) $U(r,\theta)=\frac{\ln r}{\ln 2}+\left(\frac{2}{2-\frac{1}{2}}r+\frac{-2}{2-\frac{1}{2}}r^{-1}\right)\cos\theta+\left(\frac{1}{4-\frac{1}{4}}r^2+\frac{-1}{4-\frac{1}{4}}r^{-2}\right)\cos(2\theta)$
$+\left(\frac{-\frac{1}{4}}{4-\frac{1}{4}}r^2+\frac{4}{4-\frac{1}{4}}r^{-2}\right)\sin(2\theta)$
$=\frac{\ln r}{\ln 2}+\frac{4}{3}(r-r^{-1})\cos\theta+\frac{4}{15}(r^2-r^{-2})\cos(2\theta)$
$+\frac{1}{15}(-r^2-16r^{-2})\sin(2\theta)$.

(c) $U(r,\theta)=b+(a-b)\frac{\ln r}{\ln 2}$.

(d) $U(r,\theta)=(\frac{a-\frac{1}{8}b}{8-\frac{1}{8}})r^3+(\frac{8b-a}{8-\frac{1}{8}})r^{-3}\sin(3\theta)=\left(\frac{8a-b}{63}r^3+\frac{64b-8a}{63}r^{-3}\right)\sin(3\theta)$.

3. (a) $U(r,\theta)=1+r\cos\theta+\frac{1}{4}r^2\cos(2\theta)$. (c) $U(r,\theta)=a$. (d) $U(r,\theta)=\frac{1}{8}ar^3\sin(3\theta)$. 不能用问题 1 中的解, 因为它们在原点都有奇异性.

4. (a) 由定理 1, $U(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(4-r^2)t^2}{4-4r\cos(\theta-t)+r^2}dt$.

(b) FS $f(\theta)=\frac{1}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\theta)$.

因此, $U(r,\theta)=\frac{1}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(\frac{r}{2})^n\cos(n\theta)$, 根据定理 4 和事实 FS $f(\theta)=f(\theta)$, 它是精确解, 因 $f(\theta)$ 的周期延拓是连续和分段 C^1 的 (即, 当 $r=2$ 时级数收敛到 $f(\theta)$).

(c) 由最大值原理 (第 6.4 节的定理 1), 无穷项级数解的截取 $U_N(r,\theta)$ 与精确解 $U(r,\theta)$ 之间差的最大值在边界上取到. 因此, 我们只需估计 FS $f(\theta)$ 在 0.01 之内逼近 $f(\theta)$ 所需的项数. 利用积分比较:

$$|f(\theta)-S_Nf(\theta)|\leqslant 4\int_N^{\infty}x^{-2}dx=\frac{4}{N}.$$ 因此, $N=401$ 将足够了.

5. (a) $\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$ (b) (*i*) $\frac{2\pi r^n}{\sqrt{1-a^2}}$, 其中 $r=\frac{1}{a}(1-\sqrt{1-a^2})$, $n=0,1,2,\cdots$.

9. 由平均值定理, 稳态温度 (即, 具有给定边值的调和函数) 是平均

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}10\theta^2d\theta=\frac{1}{2\pi}\frac{20}{3}\pi^3=\frac{10}{3}\pi^2.$$

练习 6.4

3. 注意到对任意常数 c, $u(x,y)=c\sinh y\sin x$ 满足问题. 这不与定理 2 矛盾, 因为区域 $0<x<\pi$, $0<y<\infty$ 不是有界的.

4. 函数 u_1 和 u_2 在原点有奇异性, 因此在圆盘 $x^2+y^2\leqslant 1$ 内不是处处调和的.

7. (a) 如果 $u(x,y)$ 是解, 则 $u(x,y)+y$ 也是.

练习 6.5

2. 函数 $\ln r$ 在原点没定义, 因此不是调和的.

10. (d) 由 v–轴上从 -1 到 1 的割缝的流体流产生的流线. 静电学上该双曲线表示当一块带大正电荷的板与带大负电荷的板边缘对边缘地置放所产生的等势曲线, 两板之间有一条割缝. 如果这两块板保持不同的常值温度, 则双曲线将是稳态温度分布所产生的等温线.
11. (a) 稍微在 u–轴之上的 $(-\infty,-1]+i\epsilon$ 在 $g(w)=\sqrt{1-w^2}$ 下的图像是正 y–轴稍微往右. 稍微在 u–轴之上的 $[-1,1]+i\epsilon$ 的图像落在 x–轴上线段 $[0,1]$ 稍上一些, 然后把该线段稍下面的拉回原点. $[1,+\infty)+i\epsilon$ 的图像是稍微在负 y–轴右边. 因此, 流线围绕 x–轴的线段 $[-1,1]$ 流动.
(b) 流线是带有垂直条的大平板上的稳态热分布的 (截面) 等温线, 或由具有相同形状带电导体产生的位势的等势曲线.

练习 7.1

1. 下面 (a), (b) 和 (c) 中的求和是对所有非零整数.
(a) $\mathrm{FS_c}\ f(x)=\frac{L}{i\pi}\sum\frac{(-1)^{m+1}}{m}e^{im\pi x/L}$.
(b) $\frac{L^2}{3}+\frac{2L^2}{\pi^2}\sum\frac{(-1)^m}{m^2}e^{im\pi x/L}$.
(c) $\frac{L}{2}+\frac{L}{\pi^2}\sum\frac{1-(-1)^m}{m^2}e^{im\pi x/L}$.
3. (a) $\hat{f}(\xi)=\frac{1}{\xi^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\big(1-\cos(\xi L)\big)$
(c) $\hat{f}(\xi)=\frac{1}{2i\sqrt{a}}\big(e^{-\frac{1}{2}(\xi-b)^2/a}-e^{-\frac{1}{2}(\xi+b)^2/a}\big)$.

练习 7.2

2. (a) $\hat{f}(\xi)=(1-\xi^2)e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$
7. $\hat{f}(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(1+i\xi)^{-3}$.
19. (a) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(am)}{m}=\frac{1}{2}(\pi-a)$, $0<a\leqslant\pi$. 该和是奇的且关于 a 是 2π 为周期的.
(c) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{a^2+m^2}=\frac{1}{2}\big(\frac{\pi}{a}\coth(\pi a)+\frac{1}{a^2}\big)\quad(a\neq 0)$.

练习 7.3

1. (a) $\check{g}(x)=e^{-\frac{1}{2}ax^2}$. (c) $\check{g}(x)=\begin{cases}0, & |x|>1,\\ \frac{1}{2}, & |x|=1,\\ 1, & |x|<1.\end{cases}$
3. $\hat{h}(\xi)=\sqrt{2\pi}i^{n+1}\xi\hat{f}(\xi)\hat{f}^{(n)}(\xi)$.
5. (a) $\hat{f}_n(\xi)=\frac{n!}{\sqrt{2\pi}}\big(\frac{1-i\xi}{1+\xi^2}\big)^{n+1}$.
6. (a) $g(x)=\frac{b}{\sqrt{2\pi(b-a)}}\exp(-\frac{ab}{2(b-a)}x^2)$.

7. (a) $\frac{1}{2}\pi a^{-3}$.

(c) $\frac{\pi}{a^2}(1-e^{-ab})$.

10. $f(x)=1-|x|$ 如果 $|x|<1$, $f(x)=0$ 如果 $|x|\geqslant 1$.

练习 7.4

2. $u(x,t)=\sqrt{\frac{t}{2k}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}$.

11. $u(x,t)=\frac{\sin(x+at)}{1+(x+at)^2}+\frac{\sin(x-at)}{1+(x-at)^2}$.

14. $u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yf(s)}{y^2+(x-s)^2}ds=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{-y}{y^2+(x-s)^2}ds+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{y}{y^2+(x-s)^2}ds$

$=\frac{1}{\pi}\arctan(\frac{x-s}{y})\Big|_0^{\infty}-\frac{1}{\pi}\arctan(\frac{x-s}{y})\Big|_0^{\infty}=\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{y}$.

练习 7.5

2. $u(x,t)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-s}}e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}h(s)ds$.

3. $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_0^{\infty}(e^{-\frac{(x+y)^2}{4kt}}+e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}})f(y)dy-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{t}{\sqrt{t-s}}e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}h(s)ds$.

5. $u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}y\big(\frac{1}{y^2+(x-s)^2}-\frac{1}{y^2+(x+s)^2}\big)f(s)ds$.

8. (a) $u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\big(y\big(\frac{1}{y^2+(x-s)^2}-\frac{1}{y^2+(x+s)^2}\big)f(s)+x\big(\frac{1}{x^2+(y-s)^2}-\frac{1}{x^2+(y+s)^2}\big)g(s)\big)ds$. 注意到通过简单地加上因子 xy 或 $\mathrm{Im}[(x+iy)^{2n}]$, $n=1,2,3,\cdots$ 可得到其他的解.

练习 8.1

1. $u(x,y,t)=4\exp\big(-\pi^2((\frac{3}{2})^2+1^2)6t\big)\sin\frac{3\pi x}{2}\sin(\pi y)$

$-2\exp\big(-\pi^2(1^2+(\frac{2}{3})^2)6t\big)\sin(\pi x)\sin\frac{2\pi y}{3}$.

3. $u(x,y,t)=\exp\big(-\pi^2((\frac{3}{2})^2+(\frac{1}{2})^2)t\big)\cos\frac{3\pi x}{2}\sin\frac{\pi y}{2}$.

7. 以下近似的有效性见例 3.

(a) $u(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},t)\approx\frac{6400}{\pi^3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-9\pi^2kt/4}$. 注意到 $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 和 $1^2+1^2+(\frac{1}{2})^2=\frac{9}{4}$.

(b) $u(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},t)\approx\frac{400}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi^2kt/4}$.

(c) 对相对的绝热面, $u(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},t)\approx\frac{1600}{\pi^2}e^{-2\pi^2kt/2}$.

对相邻的绝热面, $u(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},t)\approx\frac{6400}{\pi^2}\frac{1}{2}e^{-3\pi^2kt/2}$. 因此, 相邻的绝热面当 t 大时在中心温度下降得最小, 因 $\frac{3}{2}<2$.

8. $u(x,y,z)=\frac{1}{\sinh\sqrt{2}}\sin x\sin y\sinh(\sqrt{2}(1-z))$.

13. $u(x,y,t)=\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{c_nc_m}{\pi a\sqrt{n^2+m^2}}\sin(\pi a\sqrt{n^2+m^2}t)\sin(n\pi x)\sin(m\pi y)$,

其中

$$\begin{aligned}
c_k &= 2\int_0^1 z(z-1)\sin(k\pi z)dz = 2\langle s_k, z(z-1)\rangle = -\frac{2}{(k\pi)^2}\langle s'', z(z-1)\rangle \\
&= -\frac{2}{(k\pi)^2}\left(\{s_k'(z)z(z-1) - s_k(z)(2z-1)\}\Big|_0^1 + \langle s_k, 2\rangle\right) = -\frac{2}{(k\pi)^2}\langle s_k, 2\rangle \\
&= \frac{2}{(k\pi)^3}2\cos(k\pi z)\Big|_0^1 = \frac{2}{(k\pi)^3}2(\cos(k\pi)-1) = 2(k\pi)^{-3}2((-1)^k-1) \\
&= -\left(\frac{2}{k\pi}\right)^3, \quad \text{如果 } k \text{ 是奇数, 否则为 } 0.
\end{aligned}$$

因此,

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m=1\ (\text{奇数})}^{\infty} \left(\frac{4}{nm\pi^2}\right)^3 \frac{1}{\pi a\sqrt{n^2+m^2}} \sin(\pi a\sqrt{n^2+m^2}t)\sin(n\pi x)\sin(m\pi y).$$

练习 8.2

1. (a) $f_{n,m}(x,y) = \cos\frac{n\pi x}{3}\cos\frac{m\pi y}{2}, \quad m,n = 0,1,2,\cdots.$

(b) $u_t = k\triangle u$ 相应的解具有以下形式

$$u_{n,m}(x,y,t) = \exp\left(-k\pi^2\left(\left(\frac{m}{3}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2\right)t\right)\cos\frac{n\pi x}{3}\cos\frac{m\pi y}{2}.$$

注意到 $u(x,y,t) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} a_{n,m}u_{n,m}(x,y,t)$ 满足问题

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.} \quad u_t = k\triangle u, \quad \text{于 } R \text{ 上},\ t > 0; \\
&\text{B.C.} \quad \begin{cases} u_y(x,0,t) = u_y(x,2,t) = 0, & (0 \leqslant x \leqslant 3) \\ u_x(0,y,t) = u_x(3,y,t) = 0, & (0 \leqslant y \leqslant 2) \end{cases} \\
&\text{I.C.} \quad u(x,y,0) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} a_{n,m}\cos\frac{n\pi x}{3}\cos\frac{m\pi y}{2}.
\end{aligned}$$

4. 两解具形式 $u_1(x,y,t) = \exp(-\pi^2(3^2+1^2)kt)\cos(3\pi x)\cos(\pi y)$ 和 $u_2(x,y,t) = \exp(-\pi^2(2^2+2^2)kt)\cos(2\pi x)\cos(2\pi y)$. 由于 $3^2+1^2 > 2^2+2^2$, 故解 u_1 衰减得更迅速. 一般而言, 特征值越大, 衰减得就越迅速.

练习 8.3

1. (a) $U(\rho,\varphi,\theta)=\frac{1}{\rho}$. (c) $U(\rho,\varphi,\theta)=\rho^2\sin^2\varphi-2\rho^2\cos^2\varphi=\rho^2(1-3\cos^2\varphi)$.

3. $\triangle_s(\sin\varphi)=(\sin\varphi)^{-1}\cos^2\varphi-\sin\varphi$; $\sin\varphi$ 在单位球面上不是 C^2 的 (也不是 C^1 的).

8. (a) $U(\rho,t)=\frac{1}{\rho}\big(\frac{3}{4}e^{-\pi^2kt}\sin(\pi\rho)-\frac{1}{4}e^{-9\pi^2kt}\sin(3\pi\rho)\big)$.

11. (a) $U(\rho,t)=\frac{1}{\rho}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_0^\infty(e^{-(\rho-\bar\rho)^2/(4kt)}-e^{-(\rho+\bar\rho)^2/(4kt)})\bar\rho f(\bar\rho)d\bar\rho$.

练习 8.4

2. 下面的答案不是唯一的.
 (a) $(x,y,z)\mapsto\big(\sqrt{\frac{1}{2}}(y+x),\sqrt{\frac{1}{2}}(y-x),z\big)$; 绕 z-轴旋转 -45°.
 (c) $(x,y,z)\mapsto(-y,x,z)$; 绕 z-轴旋转 90°.

4. (a) $8\rho^4P_4(\cos\varphi)=\rho^4(35\cos^4\varphi-30\cos^2\varphi+3)=35z^4-30\rho^2z^2+3\rho^4$
$=35z^4-30(x^2+y^2+z^2)z^2+3(x^2+y^2+z^2)^2$.
 (b) 是, 因 $f(\varphi,\theta)=f(0,\theta)$, 此为 f 在北极的常数值.

6. (a) $2\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta=-\frac{i}{6}S_{2,2}(\varphi,\theta)+\frac{i}{6}S_{2,-2}(\varphi,\theta)$.
 $2\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta=-\frac{1}{6}S_{2,1}(\varphi,\theta)+\frac{1}{6}S_{2,-1}(\varphi,\theta)$.
 $2\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta=\frac{1}{6}S_{2,1}(\varphi,\theta)+\frac{1}{6}S_{2,-1}(\varphi,\theta)$.
 $\sin^2\varphi(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=\frac{1}{6}S_{2,2}(\varphi,\theta)+\frac{1}{6}S_{2,-2}(\varphi,\theta)$.
 $\sin^2\varphi\sin^2\theta-\cos^2\varphi=-\frac{1}{2}\big(\frac{1}{6}S_{2,2}(\varphi,\theta)+\frac{1}{6}S_{2,-2}(\varphi,\theta)\big)-S_{2,0}(\varphi,\theta)$.

11. (a) $u(x,y,z)=\frac{1}{3}+x+\frac{3}{5}z-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}y^2-\frac{1}{3}z^2+z^3-\frac{3}{5}z(x^2+y^2+z^2)$.
(b) $u(x,y,z)=x\rho^{-3}+\frac{1}{3}\rho^{-1}-\frac{1}{2}(z^2-\frac{1}{3}\rho^2)\rho^{-5}-\frac{1}{2}(x^2-y^2)\rho^{-5}+z^3\rho^{-7}-\frac{3}{5}z\rho^{-5}+\frac{3}{5}\rho^{-3}$.

17. $U(\rho,\varphi,\theta,t)=e^{-4\pi^2kt}j_0(2\pi\rho)+e^{-(\beta_{1,3})^2kt}j_1(\beta_{1,3}\rho)\cos\varphi$
$+e^{-(\beta_{2,1})^2kt}j_2(\beta_{2,1}\rho)\sin^2\varphi\sin(2\theta)$.

练习 8.5

7. 令 $f_{\nu,q}(r,\theta)=J_\nu(j_{\nu,q}r/r_0)\sin(n\pi\theta/\alpha)$, $\nu=n/\alpha$, $n=1,2,3,\cdots$, 其中 $J_\nu(r)$ 如 (6) 定义, 但以 ν 替换 m 和以 $\Gamma(\nu+k+1)$ 替换 $(m+k)!$, $j_{\nu,q}$ 是 $J_\nu(r)$ 的第 q 个正零点. 特征函数 $f_{\nu,q}(r,\theta)$(具特征值 $j_{\nu,q}/r_0$) 可用来求解在顶面和底面都是绝热, 在边上保持为 0 的薄楔形中的热流. 而且, 可用它们描述一楔形膜的振动.

8.

$$U(r,\theta,z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}c_{m,q}J_m(j_{m,q}\frac{r}{r_0})\sinh(j_{m,q}\frac{z}{r_0})e^{im\theta},$$

其中

$$c_{m,q}=\left(\pi r_0^2J_m'(j_{m,q})^2\sinh(j_{m,q}\frac{z_0}{r_0})\right)^{-1}\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}f(r,\theta)J_m(j_{m,q}\frac{r}{r_0})e^{-im\theta}drd\theta.$$

9. (e) 不是, 最小能量为 $\frac{3}{2}\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}$, 当 $N=0$ 时得到.

练习 8.6

8. 令 $U(P,t)\equiv\int_{\partial M}\partial_\nu G(P,Q)f(Q,t)d\partial M(Q)$. 由 (47), $U(P,t)$ 满足D.E. $\triangle_M U=0$, 以及 B.C. $U(Q,t)=f(Q,t),\ Q\in\partial M$. 令 $v(P,t)\equiv u(P,t)-U(P,t)$. 则 v 满足相应问题

D.E.　$v_t(P,t)=k\triangle_M u(P,t)-U_t(P,t)$,　于$M$上, $t\geqslant 0$;

B.C.　$v(Q,t)=0$,　对∂M上所有的 Q, $t>0$;

I.C.　$v(P,0)=-U(P,0)$.

为了解该相应问题, 令 v_1 是定理 4 中问题 (11) 的解 (12), $f(P)=-U(P,0)$, 令 v_2 是定理 6 中问题 (15) 的解 (16), $\varphi(P,t)=-U_t(P,t)$. 则 $v=v_1+v_2$ 以及 $u=v+U$.

21.

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}-(\beta_{n,q})^{-2}\|E_{n,q,m}\|^{-2}j_n(\beta_{n,q}\rho)S_{n,m}(\varphi,\theta)j_n(\beta_{n,q}\rho')\overline{S_{n,m}(\varphi',\theta')},$$

其中 (ρ,θ,φ)[对应地 (ρ',θ',φ')] 是 $\mathbf{r}$[对应地 $\mathbf{r}'$] 的球面坐标,$\|E_{n,q,m}\|^2$ 由第 8.4 节的 (38) 中给出.

符号说明

符　号	说　明
a_n	Fourier 余弦系数
B.C.	边界条件
b_n	Fourier 正弦系数
C^k	k 次连续可导
$c_n(x)$	$\cos\frac{n\pi x}{L}$
$\overline{D}$	子集 D 的闭包
D.E.	微分方程
$\partial_\nu f$	f 的外法向导数
∂M	流形 M 的边界
δ_x	Dirac delta"函数" 或分布
$\triangle$	Laplace 算子
$\triangle_M$	流形 M 上 Laplace 算子
$\triangle_s$	单位球上 Laplace 算子
FS $f(x)$	$[-L,L]$ 上 $f(x)$ 的 Fourier 级数
$\mathrm{FS_c}$ $f(x)$	$[-L,L]$ 上 $f(x)$ 的复 Fourier 级数
FCS $f(x)$	$[-L,L]$ 上 $f(x)$ 的 Fourier 余弦级数
FSS $f(x)$	$[-L,L]$ 上 $f(x)$ 的 Fourier 正弦级数
$\hat{f}(\xi)$	$f(x)$ 的 Fourier 变换
$\check{f}(\xi)$	$f(x)$ 的 Fourier 反变换

符　号	说　明
$\hat{f}_c(\xi)$	$f(x)$ 的 Fourier 余弦变换
$\hat{f}_s(\xi)$	$f(x)$ 的 Fourier 正弦变换
$\bar{f}(x)$	修正函数 (在跳跃点平均化)
$f_e(x)$	$f(x)$ 的偶延拓
$f_o(x)$	$f(x)$ 的奇延拓
$f^e(x)$	延拓, 在 $x=L$ 处偶延拓, 在 $x=0$ 处奇延拓
$f^0(x)$	延拓, 在 $x=L$ 处奇延拓, 在 $x=0$ 处偶延拓
$\|f\|$	函数 f 的范数
$f*g$	$f(x)$ 和 g 的卷积
$\langle f,g\rangle$	函数 f 和 g 的内积
$\Gamma(x)$	gamma 函数
$H_m(x)$	m 次 Hermite 多项式
H_n^k	$\mathbf{R}^n$ 中标准闭 k–维半空间
$H(x,t)$	热核
I.C.	初始条件
$I_m(x)$	修正的 (第一类)Bessel 函数
$j_m(x)$	m 阶第一类球 Bessel 函数
$J_m(x)$	整数 m 阶第一类 Bessel 函数
$J_\nu(x)$	实数 ν 阶第一类 Bessel 函数
$j_{m,q}$	$J_m(x)$ 的第 q 个正零点
$k_m(x)$	m 阶 Hermite 函数
$L_q^p(x)$	q 次广义 Laguerre 多项式
LS $f(\varphi,\theta)$	单位球面上函数的 Laplace 级数
$\mathbf{L}[u]$	作用在函数 u 上的微分算子
P.C.	周期性条件
$P(r,r_0,\theta-t)$	Poisson 核
$P_n(w)$	n 次 Legendre 多项式
$P_{n,m}(w)$	伴随的 Legendre 函数
$R_n^{\pm1}(\rho)$	球坐标径向函数
$\mathbf{R}_n^k$	$\mathbf{R}^n$ 的标准 k–维子空间
$S_N(x)$	Fourier 级数的 N 项部分和
$S_{n,m}$	球面调和函数
$s_n(x)$	$\sin\frac{n\pi x}{L}$
u_x, $u_{xy},\cdots$	u 的偏导数
u_p	D.E. 和 B.C. 的特解

符　　号	说　　明
$U(r,\theta)$	$u(r\cos\theta, r\sin\theta)$
$\tilde{v}(x,t;s)$	用于有关 Duhammel 原理中
$Y_m(x)$	整数 m 阶第二类 Bessel 函数
$Y_\nu(x)$	实数 ν 阶第二类 Bessel 函数



名词索引

[1] 名词所在的小节. —— 译者注

B

C

D

E

F

G

H

J

K

L

S

T

W

X

Y

Z

[General Information]
书名=基础偏微分方程
作者=（美）布利克（Bleecker，D.），（美）科达斯（Csordas，G.）著；李俊杰译
页码=670
ISBN=670
SS号=11706050
dxNumber=000006050491
出版时间=2006.05
出版社=该引擎未能查询到
定价：69.00
试读地址=http://book.szdnet.org.cn/bookDetail.jsp?dxNumber=000006050491&d=B82A7D5061A371582038954D707A428B&fenlei=1301100502&sw=%BB%F9%B4%A1%C6%AB%CE%A2%B7%D6%B7%BD%B3%CC
全文地址=http://img8.5read.com/image/ss2jpg.dll?did=n5&pid=CA9727A965A58DB9637211227F4369F791C08C4751F7E3556694AE08289FB76E1A8F3A3B3AC07D2ACF6B09920E5C7B1203D87ED76E5FB17AD6AF8EB4006073B9F654F96CCAD9E99581536E73ED04339E4421CB882B4EFEC1E4367E117D98D1203C19B075850A952ACA7DC45AC6F93342B5D6&jid=/